Projekt P-MAT - práce v programu Derive 5

Autor: RNDr. Tomáš Mikulenka **Gymnázium Kroměříž** **srpen 2004**

1. Aplikace diferenciálního počtu

Úkol 1: Napište rovnici tečny procházející středem soustavy souřadnic ke křivce dané rovnicí

$$y = \frac{x + 9}{x + 5}$$

Řešení: Směrnicová rovnice tečny ze zadání úlohy bude mít tvar **y = k x**, q = 0. Směrnici tečny získáme derivováním funkce popisující křivku:

#1: $$y = \frac{x + 9}{x + 5}$$

#2: $$\frac{d}{dx} \frac{x + 9}{x + 5}$$

#3: $$- \frac{4}{(x + 5)^2}$$

#4: $$k = - \frac{4}{(x + 5)^2}$$

což je obecný tvar směrnice **k** tečny. Rovnice tečny bude mít tvar:

#5: $$y = - \frac{4}{(x + 5)^2} \cdot x$$

Body dotyku tečny s křivkou (společné body) obdržíme řešením rovnice:

#6: $$\frac{x + 9}{x + 5} = - \frac{4 \cdot x}{(x + 5)^2}$$

#7: $$\mathrm{SOLVE}\left(\frac{x + 9}{x + 5} = - \frac{4 \cdot x}{(x + 5)^2}, x, \mathrm{Real}\right)$$

#8: $x = -15 \lor x = -3$

Dosazením těchto vypočtených hodnot x=-3 a x=-15 obdržíme příslušné hodnoty směrnic:

#9: $$-\frac{4\cdot x}{(x+5)^2} = -1$$

#10: $$-\frac{4\cdot x}{(x+5)^2} = -\frac{1}{25}$$

a výsledné rovnice tečen jsou #11 a # 12. K nakreslení grafu je třeba definovat funkci *asymptoty (f (x))* s parametrem předpisu funkce.

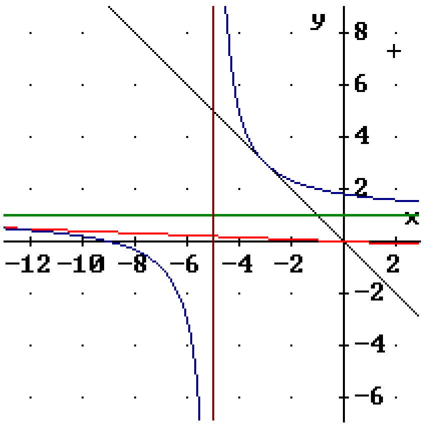
#11: $$y = -x$$

#12: $y = -\frac{1}{25}\cdot x$

#13: asymptoty(r) ≔ [r, TANGENT(r, x, ∞), SOLVE(DENOMINATOR(FACTOR(r, x, Trivial)) = 0, x)]

#14: $\text{asymptoty}\left(\frac{x+9}{x+5}\right)$

#15: $\left[\frac{x+9}{x+5}, 1, x = -5\right]$



Úkol 2: Je dána parabola *p (viz #16).* Napište rovnici její normály, která je kolmá na na přímku spojující vrchol paraboly s počátkem souřadnicové soustavy.

#16: $$y = x^2 - 6\cdot x + 6$$

#17: $(y = x^2 - 6\cdot x + 6) + 3$

Řešení: Nalezneme vrchol paraboly úpravou její rovnice. Z #19 odečteme vrchol paraboly: V = [3,-3]

#18: $y + 3 = x^2 - 6\cdot x + 9$

#19: $y + 3 = (x - 3)^2$

#20: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

Rvnice tečny a normály v bodě dotyku [x0, y0] jsou:

$$tečna\ : y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$
$$normála\ : y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

#21: $\frac{d}{dx}(x^2 - 6 \cdot x + 6)$

#22: $2 \cdot x - 6$

Po zderivování funkce určíme souřadnice bodu dotyku [x0, y0]. Tečna paraboly musí mít stejnou směrnici jako spojnice počátku souř.soustavy a vrcholu paraboly, tedy -1. x-ovou souřadnici bodu dotyku nalezneme vyřešením rovnice #23 a y-ovou souřadnici dosazením #25 do #16.

#23: $2 \cdot x - 6 = -1$

#24: SOLVE(2·x − 6 = −1, x, Real)

#25: $x = \frac{5}{2}$

#26: $y = -\frac{11}{4}$

#27: $k := -1$

#28: $y + \frac{11}{4} = k \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right)$

#29: $y + \frac{11}{4} = \frac{5 - 2 \cdot x}{2}$

#30: $\mathrm{SOLVE}\left(y + \frac{11}{4} = \frac{5 - 2 \cdot x}{2}, y, \mathrm{Real}\right)$

#31: $y = -\frac{4 \cdot x + 1}{4}$

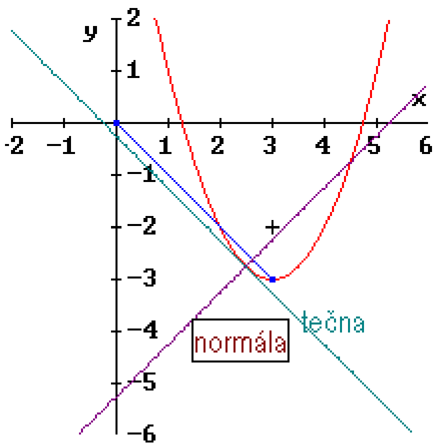
#32: $y + \frac{11}{4} = -\frac{1}{k} \cdot \left(x - \frac{5}{2}\right)$

$$\#33: \quad y + \frac{11}{4} = \frac{2 \cdot x - 5}{2}$$

$$\#34: \quad \text{SOLVE}\left(y + \frac{11}{4} = \frac{2 \cdot x - 5}{2}, y, \text{Real}\right)$$

$$\#35: \quad y = \frac{4 \cdot x - 21}{4}$$

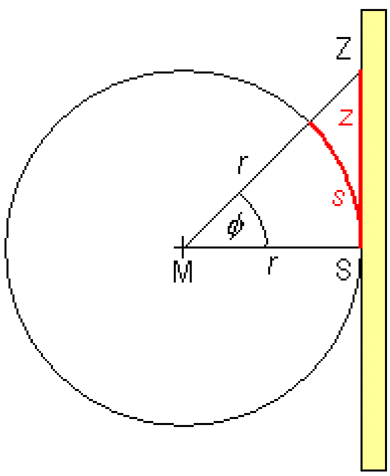
Závěr: Rovnice tečny a normály k dané parabole jsou #31 a #35. (viz graf)



2. Fyzikální aplikace diferenciálního počtu

Literatura: Berman, G.N.: Sbornik zadač po kursu matematičeskogo analiza, Fizmatgiz, Moskva 1960

Úkol 1: Kůň běží po okruhu rychlostí 20 km/h. Ve středu okruhu se nachází světelný maják a podél tečny k okruhu v bodě, z něhož startuje kůň, je postavena zeď. Jakou rychlostí se pohybuje stín koně po zdi v okamžiku, kdy se kůň nachází v jedné osmině okruhu? *(viz literatura, úloha č. 1003, str. 78)*



Řešení: Z pravoúhlého trojúhelníka MSZ - viz obr. - plyne #36, z definice úhlové rychlosti ω plyne # 37. Dosazením #37 do #36 obdržíme #38, což je vyjádření uražené dráhy z stínu koně. Okamžitou rychlost stínu koně zjistíme derivováním z podle času (#39), výsledkem derivování je # 40.

$$\#36: \quad z = r \cdot \text{TAN}(\phi)$$

$$\#37: \quad \phi = \omega \cdot t$$

$$\#38: \quad z = r \cdot \text{TAN}(\omega \cdot t)$$

$$\#39: \quad \frac{d}{dt}\,(r \cdot \text{TAN}(\omega \cdot t))$$

$$\#40: \quad \frac{\omega \cdot r}{\text{COS}(\omega \cdot t)^2}$$

kde $\omega r = v$ (obvodová rychlost koně) a $\omega t = \varphi$ (úhel). Po dosazení hodnot ze zadání ($v = 20$ km/h, $\varphi = \pi/4$) do definované funkce pro výpočet okamžité rychlosti (viz #41 a #42) obdržíme konečný výsledek (#43 : 40 km/h).

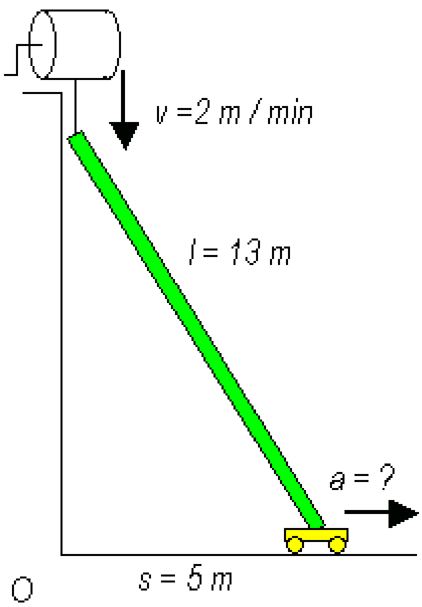
$$\#41: \quad \text{rychlost}(v,\ \phi) := \left[\frac{v}{\text{COS}(\phi)^2}\right]$$

$$\#42: \quad \text{rychlost}\left(20,\ \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\#43: \quad [40]$$

Odpověď : Okamžitá rychlost stínu koně je 40 km/h.

Úkol 2: Těžká kláda dlouhá 13 m se spouští na zem tak, že její dolní konec je připevněn k vagónku a horní konec opírající se o zeď je připevněn provazem navinutým na kolo rumpálu. Provaz se odvíjí rychlostí 2 m/min. S jakým zrychlením se pohybuje vagónek v okamžiku, kdy se nachází ve vzdálenosti 5 m od bodu O? *(viz literatura, úloha č. 1084, str. 83)*



Řešení: Označme *h* tu část dráhy, kterou horní konec klády již urazil (*h* závisí na čase podle #44), zatímco *o* bude ta část dráhy, kterou ještě má urazit. Ze svislé polohy klády v počátečním okamžiku vidíme #45 a podle Pythagorovy věty platí #46 (viz obrázek). Dosazením #44 a #45 do #46 obdržíme kvadratickou rovnici #47.

#44: $h := v \cdot t$

#45: $o := l - h$

#46: $s^2 = l^2 - o^2$

#47: $s^2 = 2 \cdot l \cdot t \cdot v - t^2 \cdot v^2$

Nyní nás zajímá, v jakém čase bude vagónek ve vzdálenosti *s* = 5 m od bodu O. Řešíme rovnici #47 vzhledem k proměnné *t*, když jsme pomocí substituce postupně dosadili *s* = 5 m, *l* = 13 m a *v* = 2 m/min = 1/30 m/s (#48 až #52). Náš kořen je *t* = 30 s, zatímco čas *t* = 750 s odpovídá opětovnému návratu vagónku k bodu O.

#48: $\mathrm{SOLVE}(s^2 = 2 \cdot l \cdot t \cdot v - t^2 \cdot v^2, t, \mathrm{Real})$

#49: $\mathrm{SOLVE}(5^2 = 2 \cdot 13 \cdot t \cdot v - t^2 \cdot v^2, t, \mathrm{Real})$

#50: $\mathrm{SOLVE}\left(5^2 = 2 \cdot 13 \cdot t \cdot \frac{1}{30} - t^2 \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^2, t, \mathrm{Real}\right)$

#51: $\mathrm{NSOLVE}\left(\mathrm{SOLVE}\left(5^2 = 2 \cdot 13 \cdot t \cdot \frac{1}{30} - t^2 \cdot \left(\frac{1}{30}\right)^2, t, \mathrm{Real}\right), t, \mathrm{Real}\right)$

#52: $\mathrm{NSOLVE}(t = 750 \lor t = 30, t, \mathrm{Real})$

Dále z rovnice #47 vyjádříme s (bude mít tvar #54) a dvakrát zderivujeme podle času (okamžité zrychlení hmotného bodu je druhou derivací dráhy podle času). Zrychlení vagónku bude mít tvar #60

#53: $\mathrm{SOLVE}(s^2 = 2 \cdot l \cdot t \cdot v - t^2 \cdot v^2, s, \mathrm{Real})$

#54: $s = \sqrt{(t \cdot v \cdot (2 \cdot l - t \cdot v))} \lor s = \sqrt{(t \cdot v \cdot (2 \cdot l - t \cdot v))}$

#55: $s = \sqrt{(t \cdot v \cdot (2 \cdot l - t \cdot v))}$

#56: $\frac{d}{dt} \sqrt{(t \cdot v \cdot (2 \cdot l - t \cdot v))}$

#57: $\frac{(l - t \cdot v) \cdot \sqrt{(t \cdot v \cdot (2 \cdot l - t \cdot v))}}{t \cdot (2 \cdot l - t \cdot v)}$

#58: $\frac{d}{dt} \frac{(l - t \cdot v) \cdot \sqrt{(t \cdot v \cdot (2 \cdot l - t \cdot v))}}{t \cdot (2 \cdot l - t \cdot v)}$

$$\#59:\quad -\frac{l^2\cdot\sqrt{(t\cdot v\cdot(2\cdot l - t\cdot v))}}{t^2\cdot(2\cdot l - t\cdot v)^2}$$

$$\#60:\quad a = -\frac{l^2\cdot\sqrt{(t\cdot v\cdot(2\cdot l - t\cdot v))}}{t^2\cdot(2\cdot l - t\cdot v)^2}$$

Nyní už jen pomocí substituce postupně dosazujeme hodnoty *l* = 13 m, *t* = 30 s, *v* = 2 m/min = 1/30 m/s (#61 až #63) a numericky vyřešíme vzhledem k proměnné *a*. Výslednou hodnotou zrychlení je pak #65.

$$\#61:\quad a = -\frac{13^2\cdot\sqrt{(t\cdot v\cdot(2\cdot 13 - t\cdot v))}}{t^2\cdot(2\cdot 13 - t\cdot v)^2}$$

$$\#62:\quad a = -\frac{13^2\cdot\sqrt{(30\cdot v\cdot(2\cdot 13 - 30\cdot v))}}{30^2\cdot(2\cdot 13 - 30\cdot v)^2}$$

$$\#63:\quad a = -\frac{13^2\cdot\sqrt{\left(30\cdot\frac{1}{30}\cdot\left(2\cdot 13 - 30\cdot\frac{1}{30}\right)\right)}}{30^2\cdot\left(2\cdot 13 - 30\cdot\frac{1}{30}\right)^2}$$

$$\#64:\quad \mathrm{NSOLVE}\left(a = -\frac{13^2\cdot\sqrt{\left(30\cdot\frac{1}{30}\cdot\left(2\cdot 13 - 30\cdot\frac{1}{30}\right)\right)}}{30^2\cdot\left(2\cdot 13 - 30\cdot\frac{1}{30}\right)^2}, a, \mathrm{Real}\right)$$

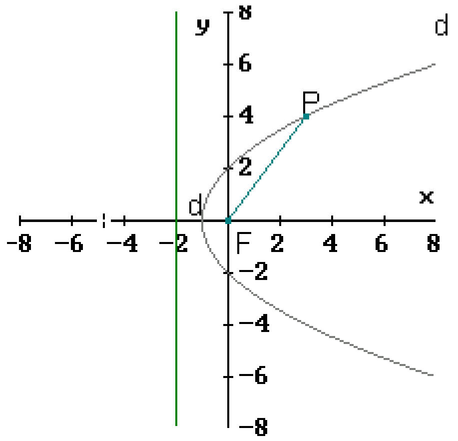
$$\#65:\quad a = -0.001502222222$$

Odpověď : Vagónek se pohybuje se zrychlením -0,0015 m/s2.

3. Rovnice kuželoseček v polárních souřadnicích

Společná rovnice kuželoseček

Pracujeme-li v polárních souřadnicích, můžeme s výhodou definovat i ostatní kuželosečky podobně jako parabolu, tedy jako geometrické místo bodů, které mají konstantní poměr vzdáleností od pevného bodu F (*ohniska*) a od pevné přímky (*řídicí*), neprocházející ohniskem. Zvolme ohnisko F za pól O a polopřímku kolmou k řídicí přímce za polární osu x. Nechť d je vzdálenost pólu F od řídicí přímky, P = (ρ,ϕ) je libovolný bod, jehož vzdálenost od ohniska F je ρ, kdežto od řídicí přímky d + ρ cosϕ (viz obrázek 1). Konstantní poměr vzdáleností označme e. Platí tedy #66 a postupnými úpravami #66 vyjádříme ρ (viz # 73).



#66: $e = \frac{\rho}{d + \rho \cdot COS(\phi)}$

#67: $\left(e = \frac{\rho}{d + \rho \cdot COS(\phi)}\right) \cdot (d + \rho \cdot COS(\phi))$

#68: $e \cdot \rho \cdot COS(\phi) + d \cdot e = \rho$

#69: $(e \cdot \rho \cdot COS(\phi) + d \cdot e = \rho) - e \cdot \rho \cdot COS(\phi)$

#70: $d \cdot e = \rho - e \cdot \rho \cdot COS(\phi)$

#71: $d \cdot e = \rho \cdot (1 - e \cdot COS(\phi))$

#72: $\frac{d \cdot e = \rho \cdot (1 - e \cdot COS(\phi))}{1 - e \cdot COS(\phi)}$

#73: $\rho = \frac{d \cdot e}{1 - e \cdot COS(\phi)}$

Dále položíme ρ =d*e a získáme tak rovnici kuželosečky v polárních souřadnicích (# 74), která představuje
a) pro e < 1 elipsu (pro e = 0 kružnici)
b) pro e = 1 parabolu
c) pro e > 1 hyperbolu

#74: $\rho = \frac{p}{1 - e \cdot COS(\phi)}$

V rovnicích # 75, # 76, # 77a # 78 byl zvolen parametr p = 0,5. Příslušné hodnoty e pak vytvoří z kuželosečky postupně kružnici, elipsu, parabolu a hyperbolu (viz obrázek 2).

#75: $\rho = \frac{0.5}{1 - 0 \cdot COS(\phi)}$

#76: $\rho = \frac{0.5}{1 - 0.75 \cdot COS(\phi)}$

$$\#77: \quad \rho = \frac{0.5}{1 - 1\cdot\mathrm{COS}(\phi)}$$

$$\#78: \quad \rho = \frac{0.5}{1 - 1.25\cdot\mathrm{COS}(\phi)}$$