

Dláždění v programu LOGO

projekt v rámci modulu P-MAT

RNDr. Tomáš Mikulénka

Gymnázium Kroměříž

červenec 2004

Toto pojednání může být námětem učitelům informatiky na základních resp. středních školách či vedoucím zájmových počítačových kroužků, anebo těm, kteří rádi pronikají do takových oborů matematiky, které nejsou v učebních plánech našich škol. Problematika dláždění (parketáže) je oborem aplikované geometrie a pomocí vhodného počítačového programu lze žáky poměrně snadno seznámit s některými zákonitostmi tohoto oboru, přičemž poznají nutnost (nebo také výhodu) některé kroky algoritmizovat. Z tohoto hlediska je velmi vhodný program LOGO, zejména pro svou interaktivnost a možnost pracovat s procedurami.

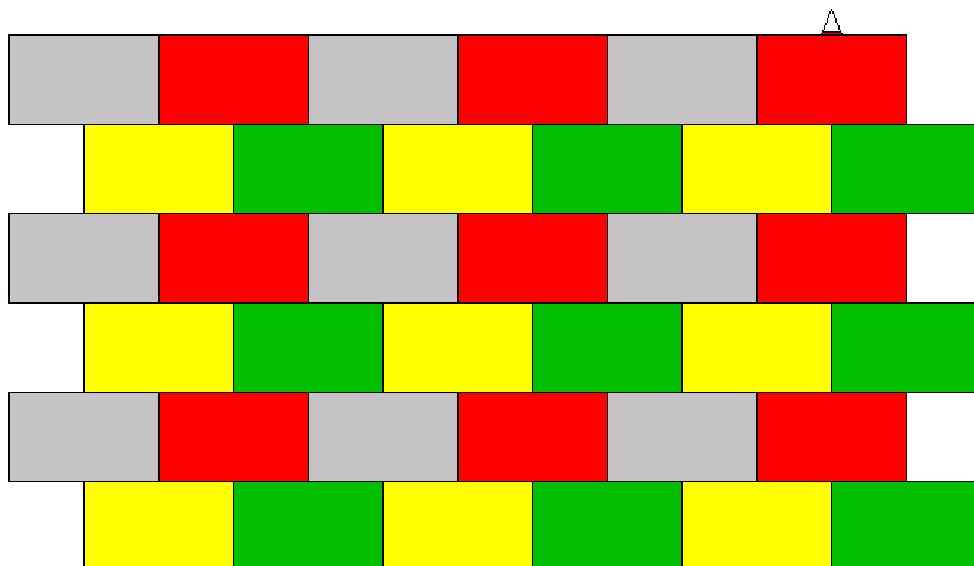
Součástí této práce je čtrnáct souborů s příponou *.LGP vytvořené v prostředí *Comenius Logo*, jejichž seznam je uveden na konci tohoto dokumentu (str. 11). Každý soubor představuje program, který po spuštění vydláždí část pracovní plochy příslušnou množinou dlaždic. Programy jsou sestaveny z jednotlivých procedur a lze je spustit zastřešující procedurou nazvanou *dlažba* (název je stejný v každém z uvedených programů). Pro zvýšení motivace žáků k algoritmizaci úloh jsem v konečném provedení kladl důraz na vybarvení geometrických útvarů, přestože to z matematického hlediska není podstatné a navíc *Comenius Logo* dovoluje pracovat pouze s 16 barvami. Výsledky všech čtrnácti programů jsou zde průběžně uváděny v podobě obrázků doprovázejících text (poté co byly nasnímány přes obrazovku a následně oříznuty), pod číslem každého obrázku je rovněž uveden název odpovídajícího souboru.

Použitá literatura: [1] *Mathematisches Mosaik*, Urania – Verlag, Leipzig 1977 (německý překlad z maďarského originálu *MATEMATIKAI ÉRDEKESSÉGEK*, Gondolat, Budapest 1969), str. 158 – 178: *István Reiman – Parkette, geometrisch betrachtet* a [2] příručka pro uživatele *Cabri Geometrie II Plus* ve formátu PDF stažená z www.pf.jcu.cz/p-mat.

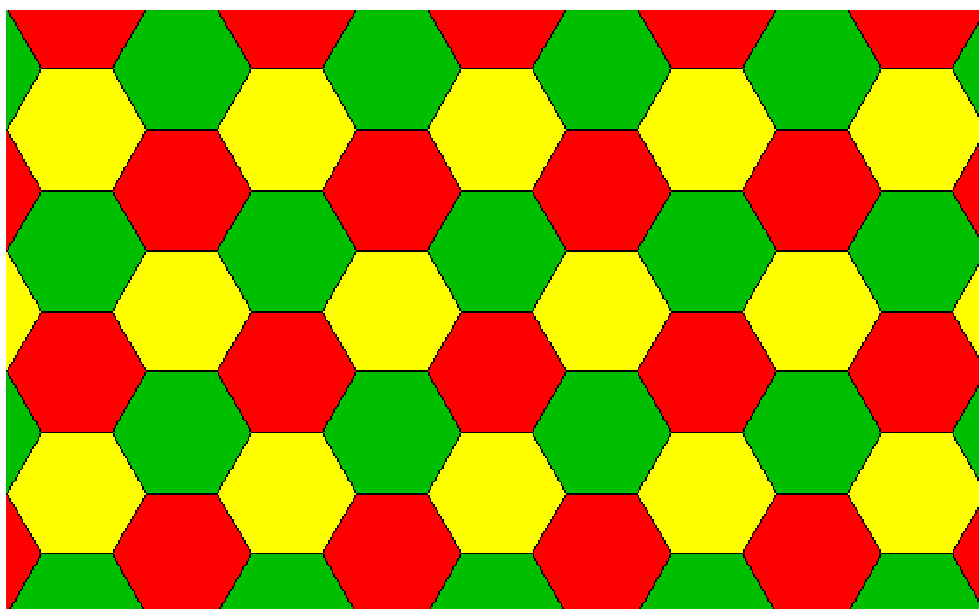
1. Malé ohlédnutí

Historie dláždění či parketáže je stejně stará jako historie stavitelství samého. Podlahy budov byly již v dobách starověku vykládány plochými kamennými bloky, později se tyto kameny opracovávaly tak, aby po vydláždění co možná nejvíce pokrývaly vymezenou plochu a zůstalo mezi nimi co nejméně prázdných míst. Během dalšího vývoje se stavitelé snažili opracovat stavební kameny tak, aby odstranili i všechna tato prázdná místa. (V teorii stavby zdí byl vývoj velmi podobný.)

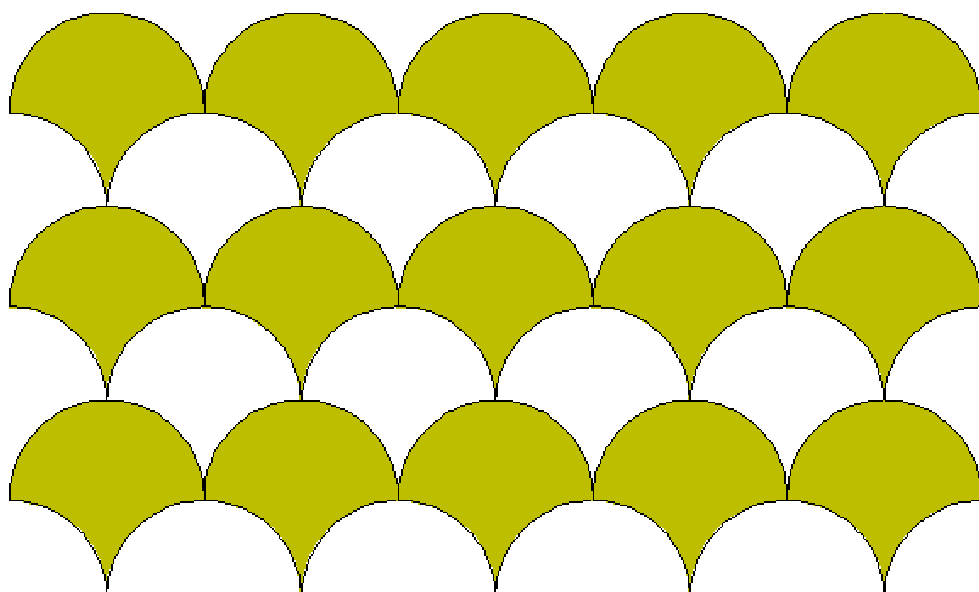
Na základě zkušeností snadno přijdeme na to, že nejsnazší je vydláždít podlahu takovými stavebními prvky, které mají všechny stejnou velikost a shodný tvar, zvlášť když musí být vypáleny z jílu, odlity z betonu či vytesány ze dřeva. Mnohé z takových vzorů jsou známy již po tisíciletí a byly použity v některých antických stavbách (viz obr. 1 až 4).



obr. 1
01_OBDEL.LGP

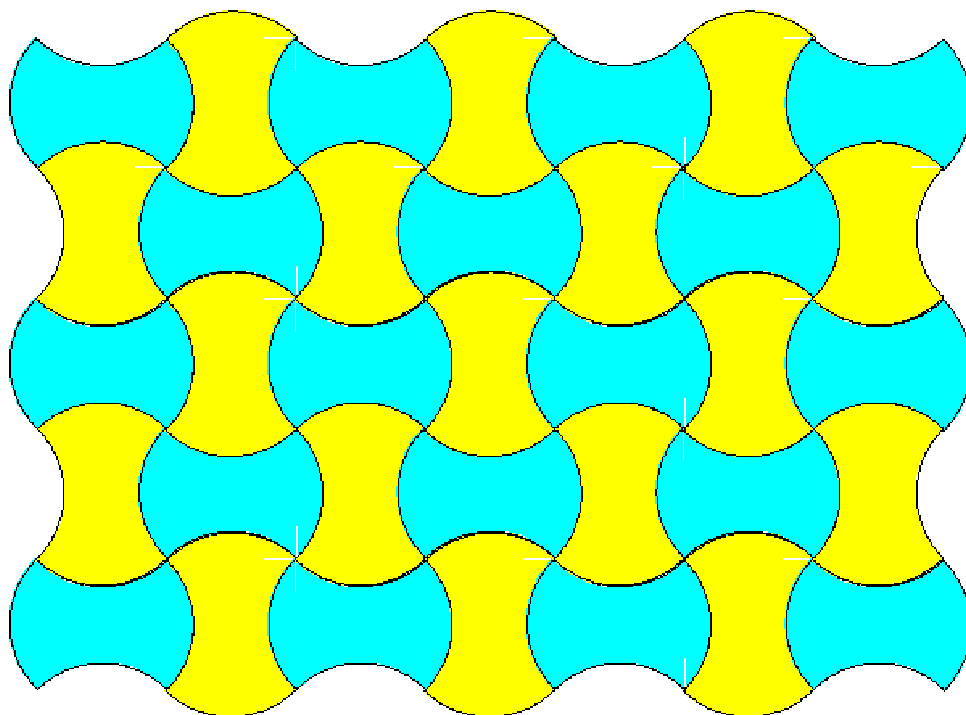


obr. 2
02_SESTI.LGP



obr. 3
03_OBLOU.LGP

obr. 4
04_OBLOU.LGP



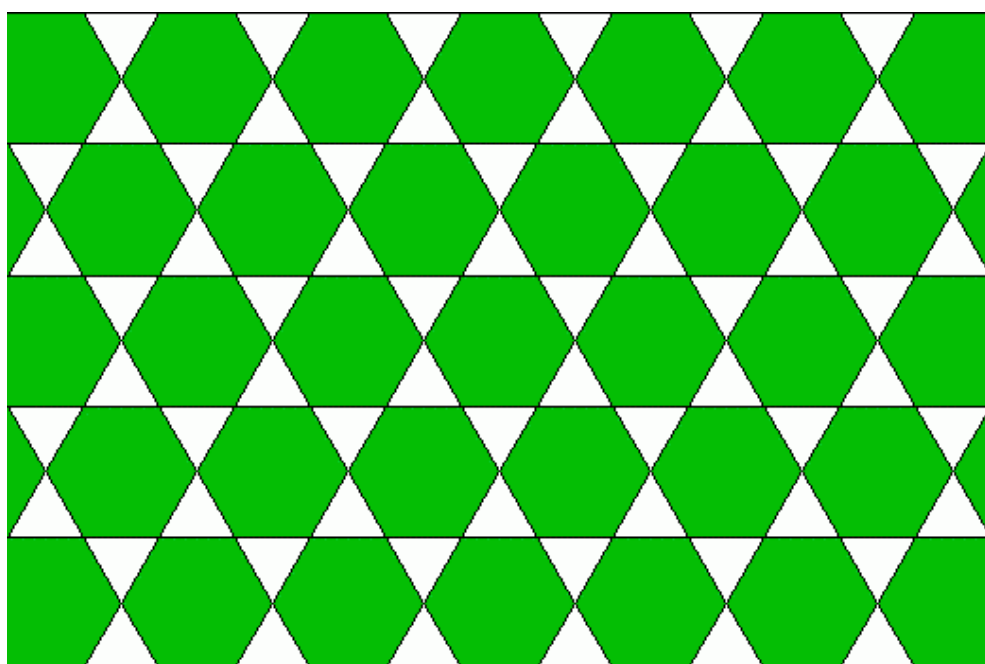
2. Trocha definic neuškodí

Dlažbou rozumíme množinu uzavřených rovinných útvarů, jejichž vnitřky se nepřekrývají a sjednocením těchto útvarů je celá rovina.

Jednotlivé útvary z výše uvedené definice nazveme *dlaždice*.

Úsečku, která je průnikem dvou dlaždíc, nazveme *hrana* a bod, který je průnikem několika dlaždíc, nazveme *uzel*. (U některých typů dlažby mohou v roli hrany vystupovat namísto úseček *oblouky*, tedy části kružnic – viz obr. 3 a 4).

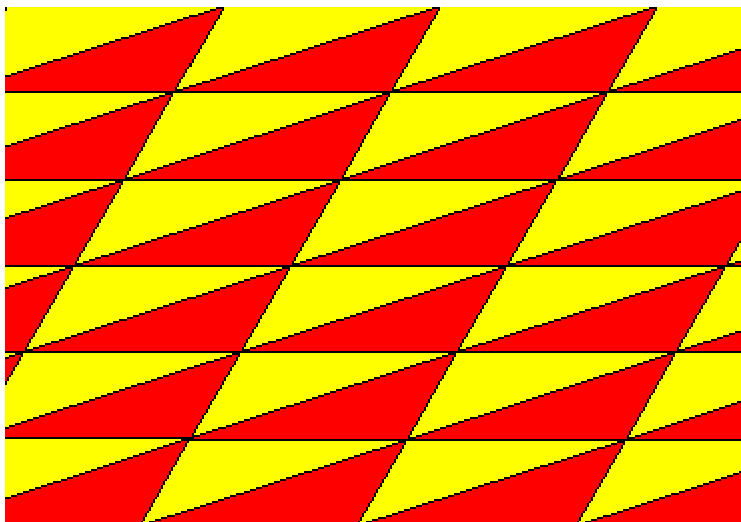
Dlažbu nazveme *monoedrickou*, jestliže všechny dlaždice jsou shodné. (Obr. 1 až 4 tak znázorňují monoedrické dlažby, obr. 5 dlažbu, která není monoedrická.)



obr. 5
05_SESTI.LGP

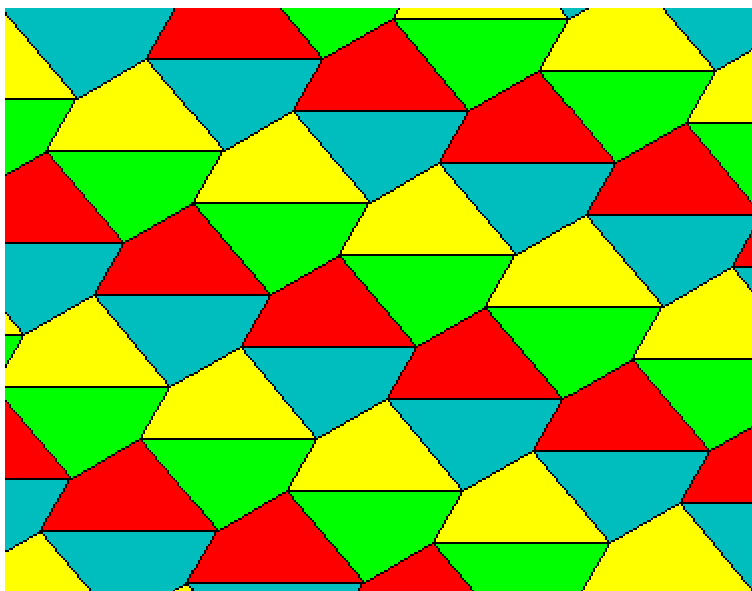
3. Monoedrické dlažby složené z mnohoúhelníků

Z obr. 1 snadno odvodíme, že monoedrická dlažba se dá sestavit z čtyřúhelníkových dlaždic s protějšími stěnami rovnoběžnými (čtverec, obdélník, kosočtverec, rovnoběžník). Z toho nepřímo plyne, že také z dlaždic ve tvaru libovolného trojúhelníka můžeme vytvořit monoedrickou dlažbu; zobrazíme-li totiž trojúhelník v otočení o 180° kolem středu jedné z jeho stran, dostaneme rovnoběžník. Situaci znázorňuje trojúhelníková dlažba na obr. 6.



obr. 6
06_TROJU.LGP

Rovinu lze pokrýt libovolnými čtyřúhelníky, přičemž nemusíme trvat na podmínce, aby protější strany čtyřúhelníka byly rovnoběžné – viz čtyřúhelníková dlažba na obr. 7.

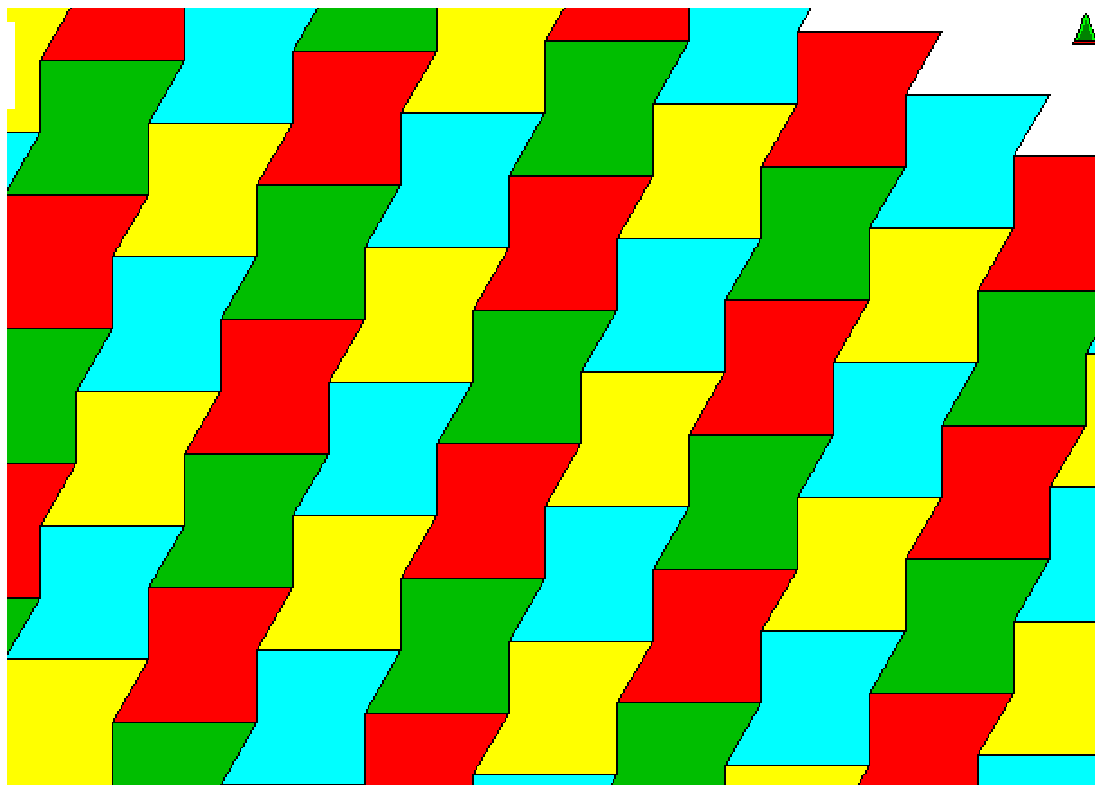


obr. 7
07_CTYRU.LGP

Jak jsme na tom se šestiúhelníky? Na obr. 2 je dlažba sestavená z pravidelných šestiúhelníků (vzor včelí plástve), přitom však pro šestiúhelníky není nutnou podmínkou monoedrické dlažby pravidelnost, nýbrž stačí podmínka středové souměrnosti. Představíme-li si na obr. 7 šestiúhelník složený ze dvou shodných čtyřúhelníků (žlutý + zelený nebo modrý + červený), vidíme, že vrcholy šestiúhelníka u odpovídajících vnitřních úhlů jsou středově souměrné (středem souměrnosti je zde střed společné hrany).

Abychom rovinu vydláždili čtyřúhelníky či středově souměrnými šestiúhelníky, nemusíme na tyto geometrické útvary dokonce ani klást podmínku konvexity. *Konvexní* n -úhelník je takový, který má všechny vnitřní úhly u svých vrcholů menší než 180° . Je-li aspoň jeden vnitřní úhel větší než 180° , je takový n -úhelník *nekonvexní*. Monoedrickou dlažbu z nekonvexních šestiúhelníků představuje obr. 8.

obr. 8
08_SESTI.LGP



K znázornění dlažby z nekonvexních čtyřúhelníků nám pomůže tentýž obrázek: musíme si jen představit úhlopříčku spojující dva protilehlé vrcholy s nekonvexními úhly. Ta nám nekonvexní středově souměrný šestiúhelník rozdělí na dva shodné nekonvexní čtyřúhelníky.

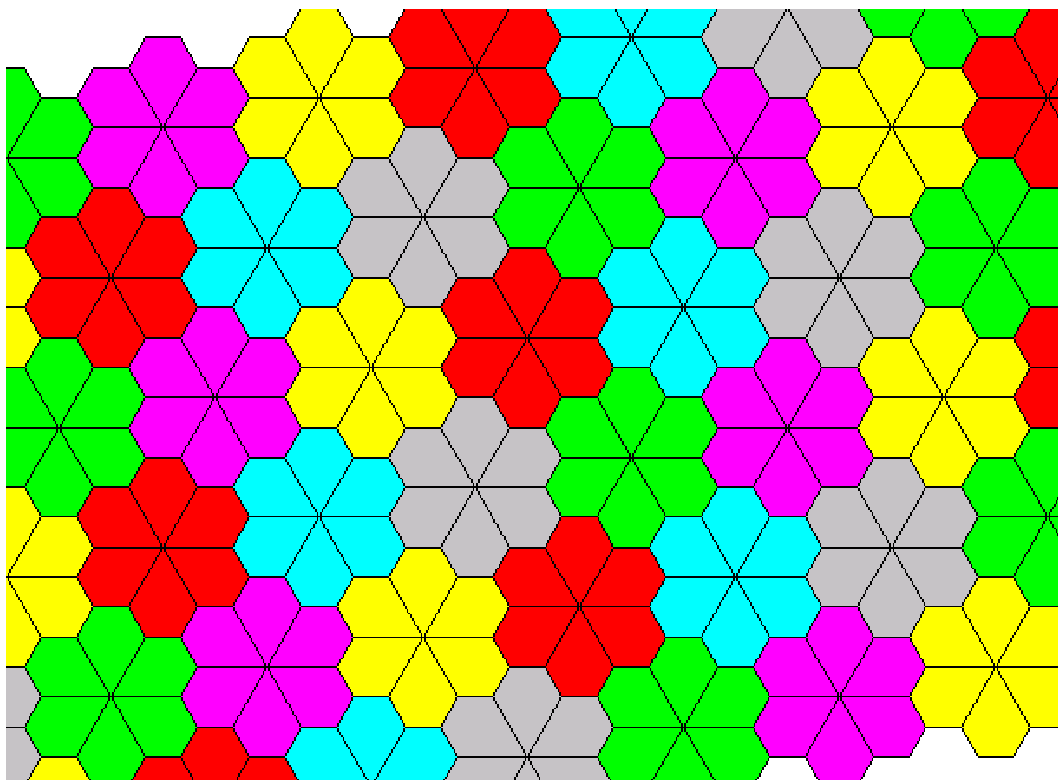


Dlažba z pětiúhelníků je problematičtější. Tak např. pravidelnými pětiúhelníky vydláždít rovinu nelze, to již přímo plyne z faktu, že velikost každého jeho vnitřního úhlu je 108° . Není však obtížné zvolit jiný typ pětiúhelníka, s nímž budeme úspěšní. Jeden takový – odvozený z pravidelného šestiúhelníka – lze použít k vydláždění roviny „květinovým vzorem“ (viz obr. 9 na následující straně).

Pětiúhelník použitelný k vytvoření monoedrické dlažby musí mít aspoň jeden vnitřní úhel, který není větší než 90° . Ukážeme, že je to nutnou podmínkou, tedy že platí věta:

Je-li každý vnitřní úhel pětiúhelníka tupý, pak s ním nelze monoedricky vydláždít rovinu. (V tom je rovněž zahrnut případ pravidelného pětiúhelníka.)

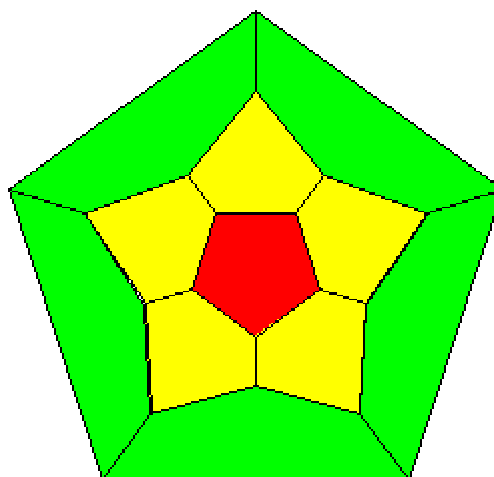
Protože součet dvou tupých úhlů je větší než 180° , mohou se v jednom uzlu (bod, v němž se dotýkají koncové body hran) stýkat nejvýše tři dlaždice, tzn. z každého uzlu příslušné pětiúhelníkové dlažby vycházejí nejvýše tři hrany.



obr. 9
09_KVET.LGP

Ukážeme dokonce ještě více: dokážeme, že ani z takových pětiúhelníků, které nemusí být všechny shodné, se nedá sestavit dlažba, u níž z každého uzlu vycházejí právě tři hrany. Pomocí obr. 10 se pokusíme konstrukci takové dlažby popsat: Vyjdeme ze středového červeného pětiúhelníka, na něj navážeme pětici žlutých a zakončíme okolím zelených pětiúhelníků. Avšak již nyní je vidět, že z každého uzlu všech pětiúhelníků vycházejí právě tři hrany, nemůžeme tedy pokračovat dále a taková dlažba neexistuje. [1]

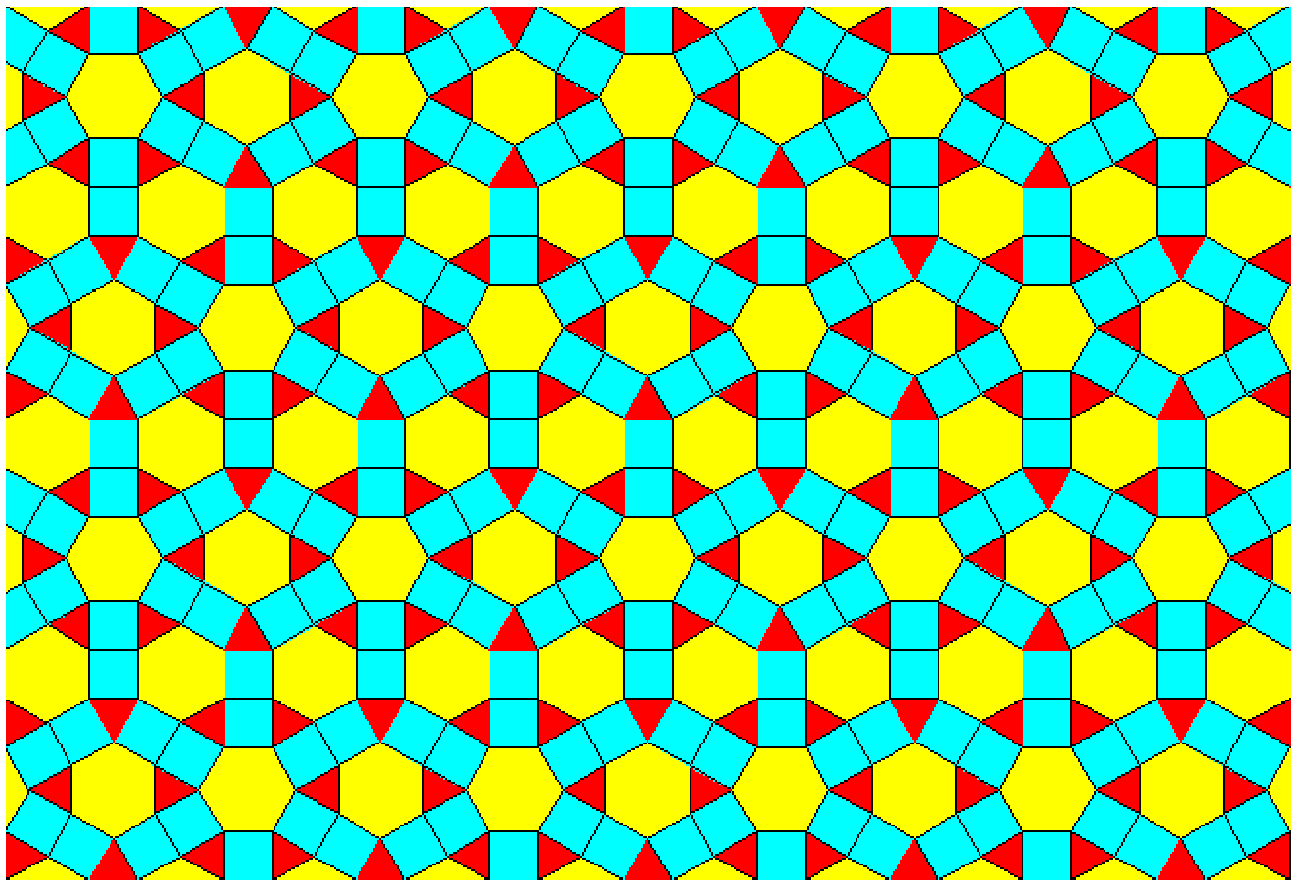
Z konvexních mnohoúhelníků s více než šesti stranami se nedá sestavit monoedrická dlažba. Nepřímý důkaz této věty lze rovněž nalézt v literatuře. [1]



obr. 10
10_DUKAZ.LGP

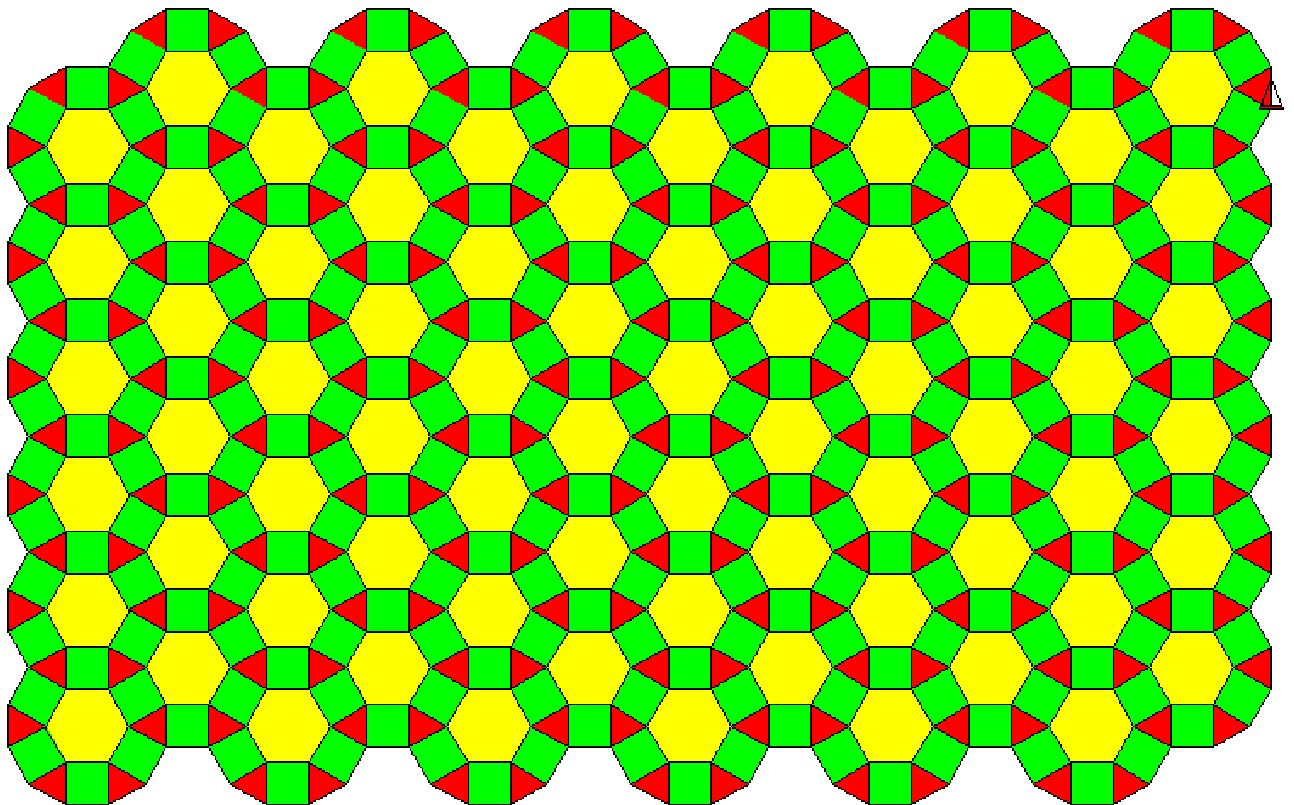
4. Mnohoúhelníkové dlažby nemonoedrické

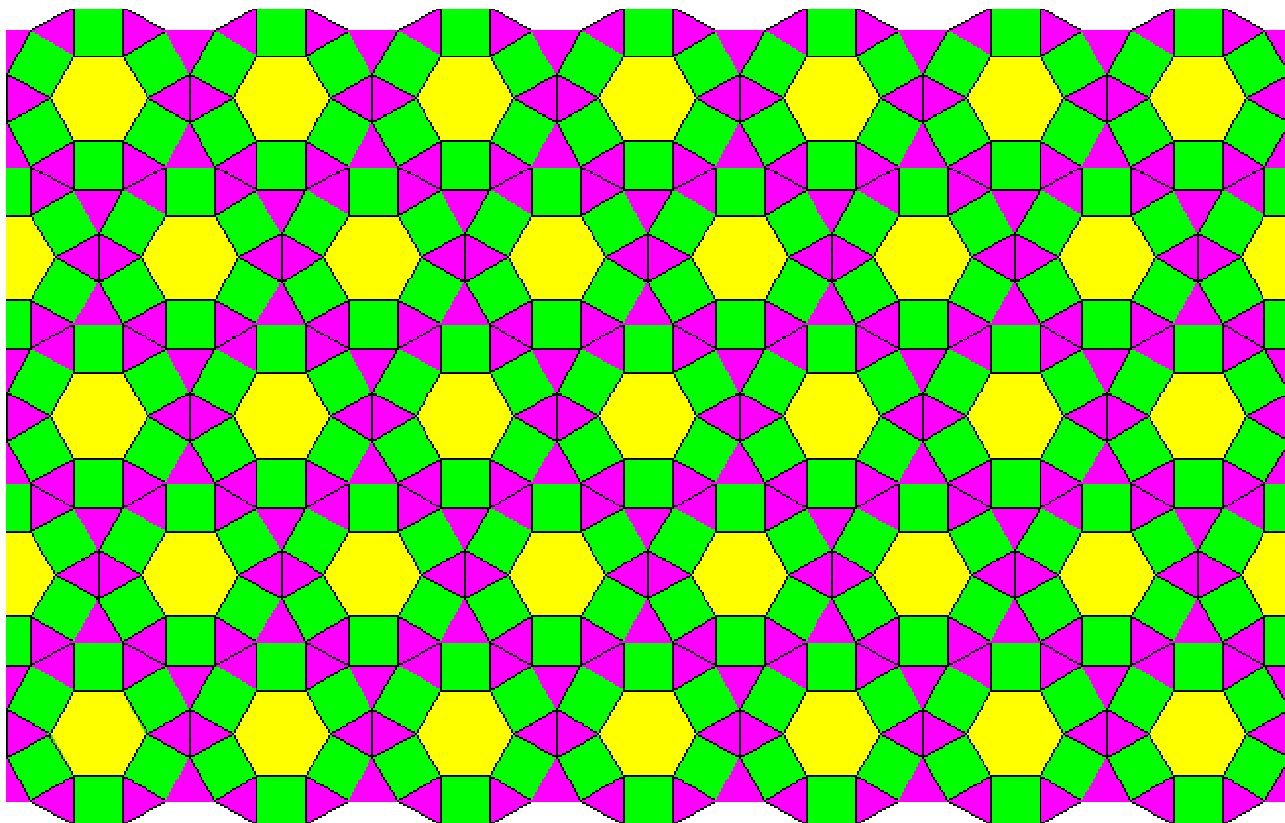
V návrhu dlažby hraje významnou roli také umělecké a estetické hledisko. Pěknější vzory než u monoedrické dlažby získáme kombinací odlišných geometrických útvarů a celkový dojem zvýrazníme tím, že shodné dlaždice opatříme toutéž barvou. Obrázky 11 až 14 znázorňují dlažby vytvořené z pravidelně se opakujících složených geometrických objektů vykazujících středovou souměrnost. Každý z nich je složen z několika rovnostranných trojúhelníků, čtverců a pravidelných šestiúhelníků.



↑ obr. 11
11_MIX.LGP

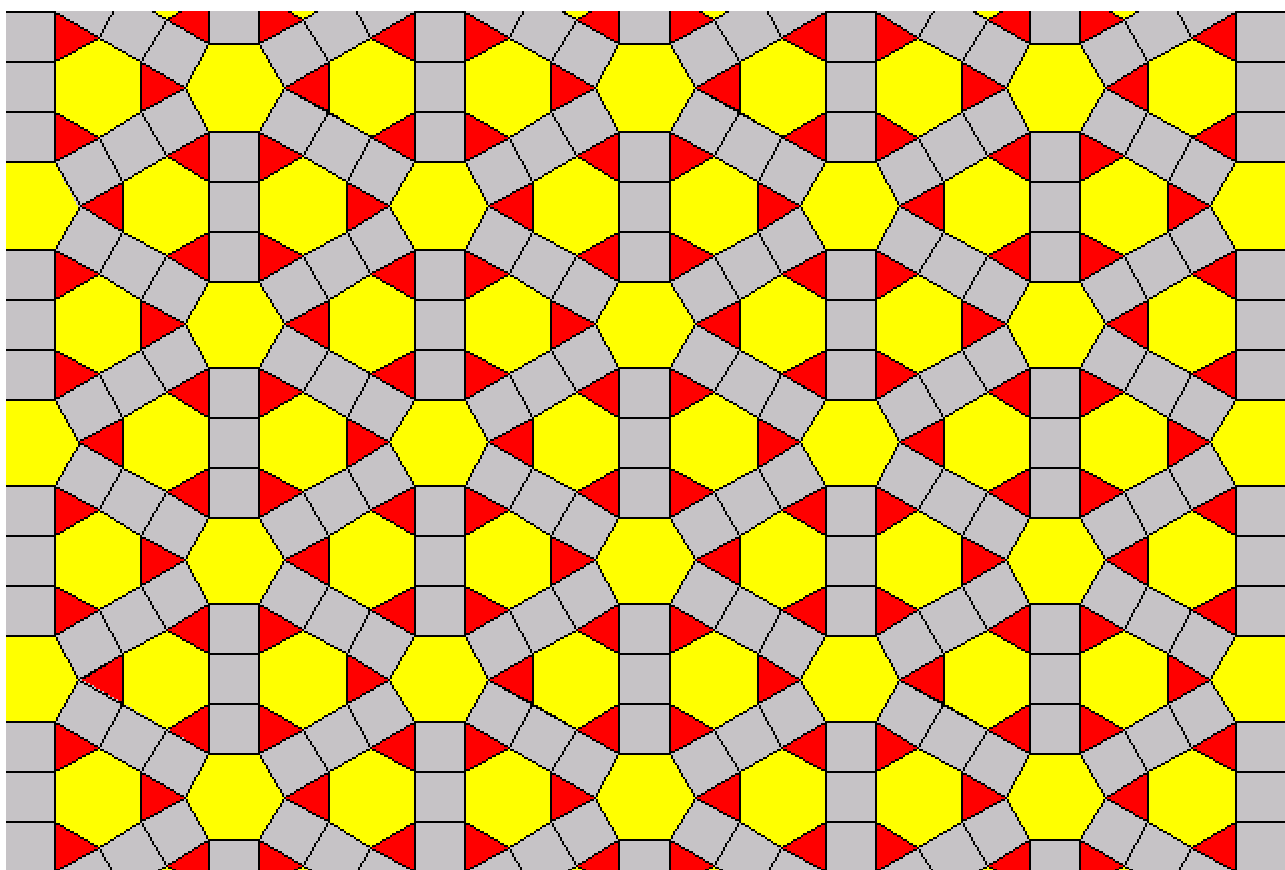
obr. 12
12_MIX.LGP ↓





↑ obr. 13
13_MIX.LGP

obr. 14
14_MIX.LGP ↓



5. Šlapeme po inspiraci ...

Po různých dlažbách cest, chodníků a nádvorí chodíme denně do školy, do práce, za nákupy, apod. Je to věc tak běžná, že si jejich vzory často ani neuvědomujeme. Některé z nich by mohly být inspirací k sestavení „dlaždicového programu“ v LOGU či jiném softwarovém prostředí. Velmi hezké parketáže lze vidět na zámcích nebo v jiných reprezentačních sálech (viz následující snímky).



Nádvorí FaME UTB Zlín



Zlín – Malenovice



Retz – Windmühlgasse, Rakousko



Kroměříž – Vodní ulice



Kroměříž - Hypernova



Dlažba v Sále předků – zámek Vranov nad Dyjí



Parketáž Poradního sálu – zámek v Kroměříži



Parketáž Trúnního sálu – zámek v Kroměříži

6. Příloha – souhrn názvů souborů

Součástí tohoto dokumentu je následujících 14 souborů vytvořených v prostředí *Comenius Logo* (názvy souborů odpovídají popisu očíslovaných obrázků jednotlivých dlažeb uvedených v tomto dokumentu v příslušném pořadí):

01_OBDEL.LGP
02_SESTI.LGP
03_OBLOU.LGP
04_OBLOU.LGP
05_SESTI.LGP
06_TROJU.LGP
07_CTYRU.LGP

08_SESTI.LGP
09_KVET.LGP
10_DUKAZ.LGP
11_MIX.LGP
12_MIX.LGP
13_MIX.LGP
14_MIX.LGP