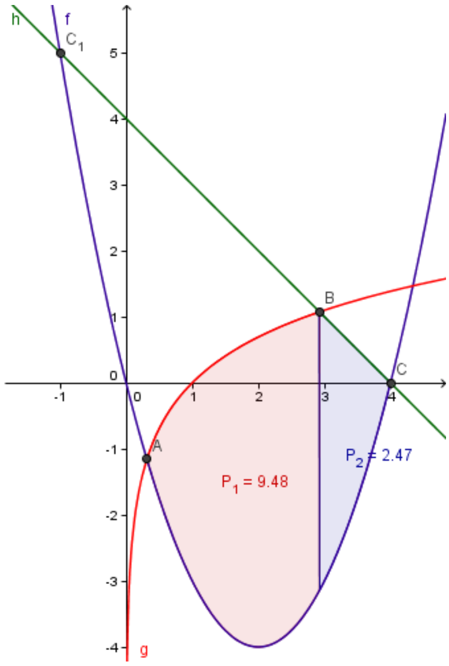
Dvacítka řešených úloh v programu GeoGebra



Tomáš Mikulenka

leden 2012

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento výukový materiál vznikl jako součást grantového projektu Gymnázia Kroměříž s názvem *Beznákladové ICT pro učitele* realizovaného v letech 2009–2012. Projekt je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.

Obsah

Předmluva

Výukových materiálů a postupů se na webu GeoGebry `www.geogebra.org` nachází velké množství, ale jen málo z nich je česky. K určitému zaplnění této mezery může přispět následující malý průvodce. *Dvacítka řešených úloh* má pomoci získat uživateli přehled o možnostech GeoGebry a jejím uplatnění ve výuce matematiky, fyziky či technických oborů na našich školách.

Pro nového uživatele GeoGebry bude užitečné nejprve si přečíst stručný návod Markuse Hohenwartera **GeoGebra – rychlý start** (český překlad je ke stažení na `www.gymkrom.cz/ict`, sekce **Materiály**). Všichni zájemci jistě ocení i další ukázky řešených úloh, např. v rozsáhlé publikaci [1] (viz Literatura).

Tomáš Mikulenka, leden 2012

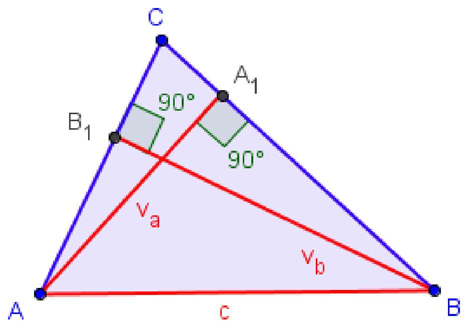
Konstrukční úlohy

Úloha 1

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $c = 6, v_a = 3{,}5, v_b = 5{,}5$.

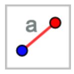
Řešení

Paty výšek A_1 a B_1 budou ležet na Thaletově kružnici sestrojené nad základnou $c = AB$ trojúhelníka. K vyřešení úlohy stačí následujících osm kroků: (1) základna $c = 6\,\text{cm}$; (2) kružnice $k_1 \equiv (A, v_a = 3{,}5\,\text{cm})$; (3) kružnice $k_2 \equiv (B, v_b = 5{,}5\,\text{cm})$; (4) Thaletova kružnice $k_T \equiv (S_{AB}, \frac{c}{2} = 3\,\text{cm})$; (5) průsečíky: $A_1 = k_1 \cap k_T$, $B_1 = k_2 \cap k_T$; (6) polopřímky: $p = \mapsto AB_1, q = \mapsto BA_1$; (7) vrchol $C = p \cap q$; (8) doplnění ΔABC.

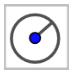


Postup

1. Do Nákresny libovolně umístíme bod A a s využitím nástroje *Úsečka dané délky z bodu* vytvoříme úsečku délky 6 cm.

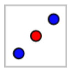


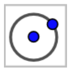
2. Kružnici k_1 zadáme do Vstupního pole zápisem `k_1 = Kruznice[A, 3.5]` nebo pomocí ikony (nástroje) *Kružnice daná středem a poloměrem.*



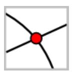
3. Přidáme kružnici k_2: zápis `k_2 = Kruznice[B, 5.5]`) nebo pomocí ikony.

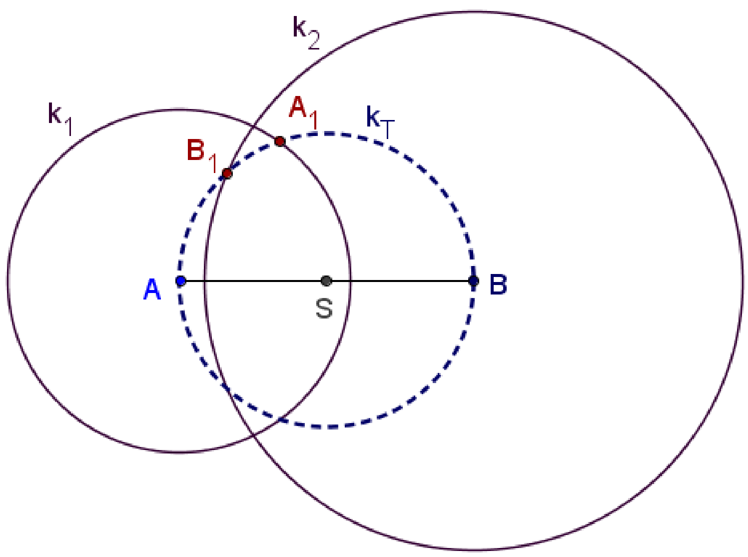
4. Najdeme střed úsečky AB a vytvoříme nad ní Thaletovu kružnici k_T. To provedeme buď pomocí nástrojů *Střed* a *Kružnice daná středem a bodem* nebo postupným zápisem do Vstupního pole `S = Stred[A, B]` a `k_T = Kruznice[S, SA]`).

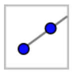


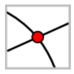


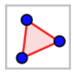
5. Průsečíky kružnic – zápisy do Vstupního pole: `A_1 = Prusecik[k_1, k_T]` a `B_1 = Prusecik[k_2, k_T]` nebo nástrojem *Prusečík dvou objektů.*

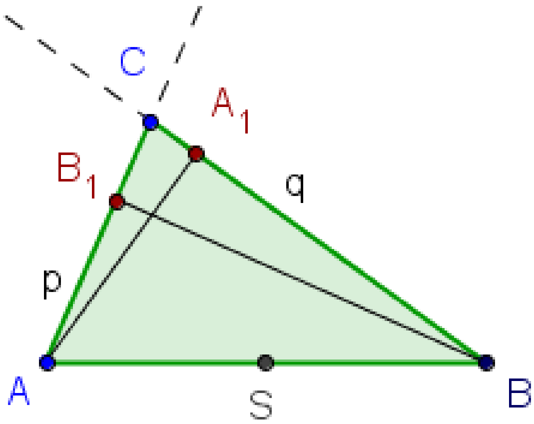




6. Sestrojíme polopřímky p, q: myší přes ikonu *Polopřímka* nebo zápisy do Vstupního pole: `p = Poloprimka[A, B_1]` a `q = Poloprimka[B, A_1]`. 

7. Doplníme vrchol C trojúhelníka jako průsečík polopřímek p, q: nástrojem *Prusečík dvou objektů* nebo zápisem `C = Prusecik[p, q]`. 

8. Body A, B, C spojíme nástrojem *Mnohoúhelník* – postupně klikneme na A, B, C, A. Nebo stručněji zápisem `Mnohouhelnik[A, B, C]`. 

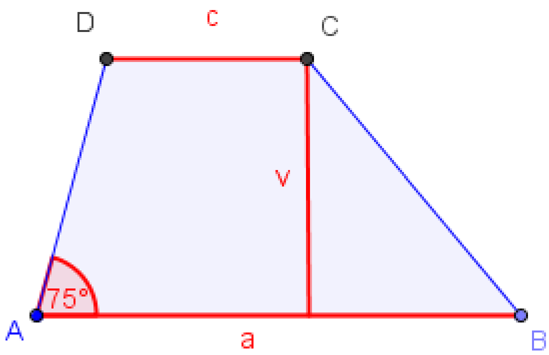


Úloha 2

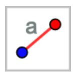
Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \,||\, CD$), je-li dáno: $a = 6$; $c = 2{,}5$; $v = 3{,}2$; $\beta = 75°$.

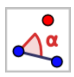
Řešení

Konstrukce lichoběžníka (zkrácený zápis): (1) základna $a = AB = 6\,$j; (2) úhel $\alpha = 75°$; (3) rovnoběžka $r \,||\, a$ ve vzdálenosti výšky v od a; (4) průsečík ramene úhlu α s rovnoběžkou $r \to D$; (5) kružnice $k \equiv (D, c = 2{,}5\,\text{j})$; (6) bod $C = k \cap r$; (7) doplnění na lichoběžník $ABCD$.



Postup

1. Do Nákresny libovolně umístíme bod A a s využitím nástroje *Úsečka dané délky z bodu* vytvoříme úsečku AB délky $6\,$j. 

2. Nástrojem *Úhel dané velikosti* klikneme na B a A, do nabídnutého políčka zadáme požadovaných $75°$ a zvolíme „proti směru hodin". 

3. Dokončíme rameno úhlu α (zápisem `p = Poloprimka[A, B']` nebo nástrojem *Polopřímka*; bod B' vznikl automaticky v předchozím kroku).

4. Vztyčíme kolmici na základnu a v bodě B: zápisem `m = Kolmice[B, a]` do Vstupního pole nebo pomocí nástroje *Kolmice*.

5. Abychom mohli sestrojit rovnoběžku r ve vzdálenosti výšky $v = 3{,}2\,\mathrm{j}$ od základny, použijeme kružnici: (zápis `k = Kruznice[B, 3.2]` nebo ikona).

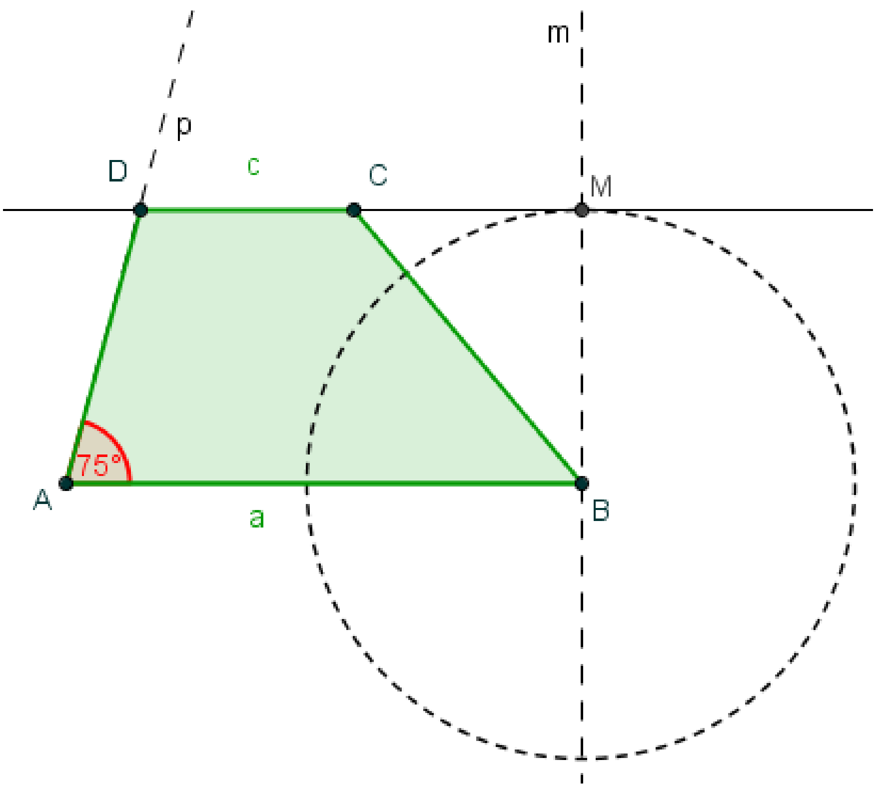
6. V průsečíku $M = m \cap k$ (zápis `M = Prusecik[m, k]`) sestrojíme rovnoběžku r se základnou a (zápis `r = Primka[M, a]` nebo pomocí ikony).

7. Vrcholem D lichoběžníka bude průsečík rovnoběžky r s ramenem úhlu α (zápis `D = Prusecik[r, p]` nebo nástrojem *Prusecik*).

8. Poslední vrchol C: nástrojem *Úsečka dané délky z bodu* naneseme na rovnoběžku r vzdálenost $DC = c = 2{,}5\,\mathrm{j}$.

9. Doplnění na lichoběžník: nástrojem *Mnohoúhelník* postupně klikneme na A, B, C, D, A. Nebo také zápisem `Mnohouhelnik[A, B, C, D]`.

10. Lichoběžníku nastavíme vhodnou barvu, tloušťku čar a sytost výplně. Všechny pomocné konstrukce můžeme skrýt.



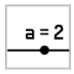
Vlastnosti trojúhelníka a čtyřúhelníka

Úloha 3

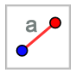
Sestrojte trojúhelník ABC pomocí věty sss. Demonstrujte na něm zákonitosti trojúhelníkové nerovnosti.

Řešení

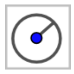
1. Definujeme tři posuvníky a, b, c v rozsahu od 1 do 5, krok 0.1 a necháme je zobrazit v Nákresně.



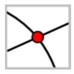
2. Nástrojem *Úsečka dané délky z bodu* klikneme do Nákresny a zadáme délku c. Úsečku pojmenujeme AB (základna c trojúhelníka).



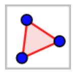
3. Kružnici $k \equiv (A, b)$ získáme zápisem `k=Kruznice[A,b]` do Vstupního pole nebo nástrojem *Kružnice daná středem a poloměrem.*



4. Stejným způsobem vytvoříme kružnici $l \equiv (B, a)$. V průsečíku obou kružnic bude vrchol C trojúhelníka.

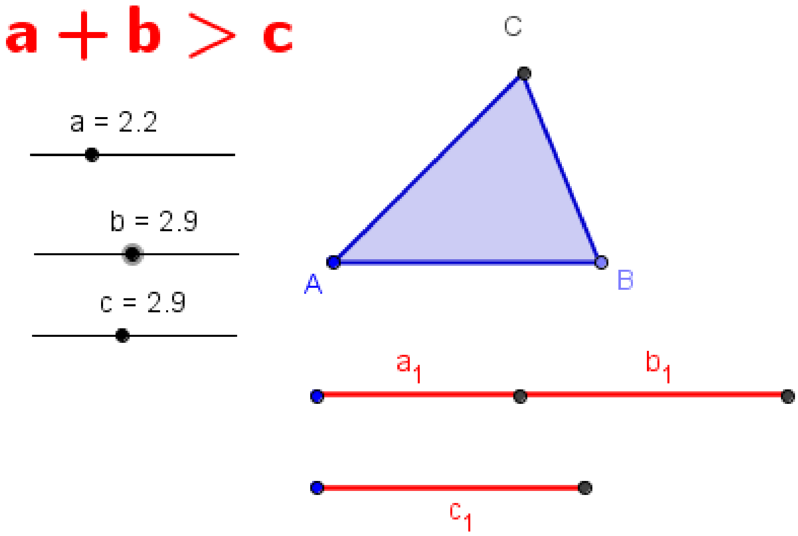


5. Nástrojem *Mnohoúhelník* dokončíme konstrukci trojúhelníka ABC. Nastavíme jeho vlastnosti a skryjeme pomocné objekty.



6. Do Nákresny vložíme informativní text popisující trojúhelníkovou nerovnost: $a + b > c$. Pro lepší vzhled můžeme zatrhnout volbu LaTeX vzorec.

Velikosti jednotlivých stran trojúhelníka ovládáme přes posuvníky a, b, c. V okamžiku, kdy přestane platit některá z trojúhelníkových nerovností $a + b > c$, $a + c > b$ nebo $b + c > a$, změní se trojúhelník na úsečku.



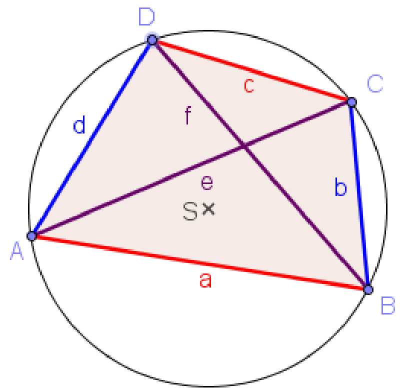
Model se dá vylepšit přidáním dvou rovnoběžek: na jednu z nich naneseme za sebou délky dvou stran trojúhelníka, na druhou pak délku třetí strany. Budeme tak moci lépe sledovat, zda trojúhelníková nerovnost platí nebo je porušena.

Úloha 4

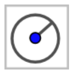
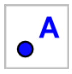
Sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$ a ukažte na něm platnost Ptolemaiovy věty:

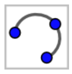
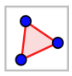
$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$$

kde e, f jsou úhlopříčky tětivového čtyřúhelníka a a, b, c, d jsou jeho strany.

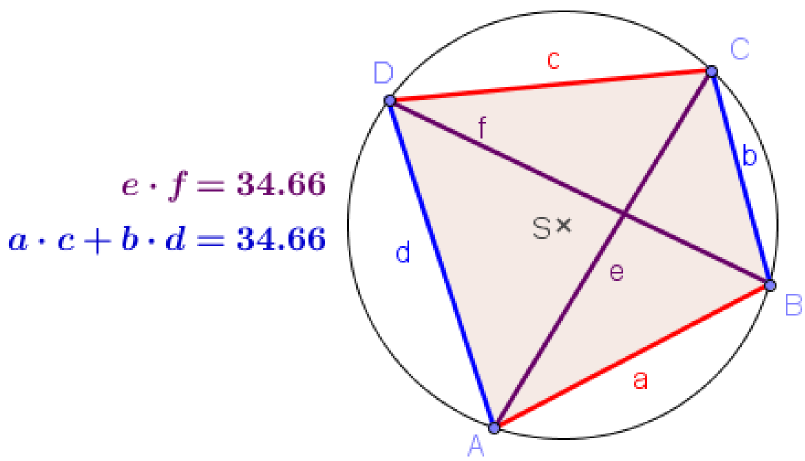


Řešení

1. Do Nákresny umístíme kružnici se středem S (pro jednoduchost v počátku souřadnicového systému) o poloměru např. 3 cm. 
2. Na tuto kružnici rozmístíme přibližně rovnoměrně čtyři body K, L, M, N. 

3. Nástrojem *Kruhový oblouk procházející třemi body* vytvoříme na kružnici postupně oblouky s krajními body KL, LM, MN a NK. 
4. Na oblouk KL umístíme vrchol A čtyřúhelníka, podobně na oblouk LM umístíme vrchol B, na oblouk MN vrchol C a na oblouk NK vrchol D. Tímto postupem zajistíme, že vrcholy A, B, C, D, které se mohou pohybovat v mezích příslušného oblouku, budou stále tvořit vrcholy tětivového čtyřúhelníka ve správném pořadí.
5. Nástrojem *Mnohoúhelník* vytvoříme čtyřúhelník $ABCD$, zviditelníme jeho úhlopříčky (úsečky $e = AC$, $f = BD$), skryjeme pomocné objekty. 
6. Definujeme čísla $u = e \cdot f$ a $s = a \cdot c + b \cdot d$ zápisem do Vstupního pole. Pomocí nástroje *Vložit text* umístíme obě tyto hodnoty do Nákresny. 

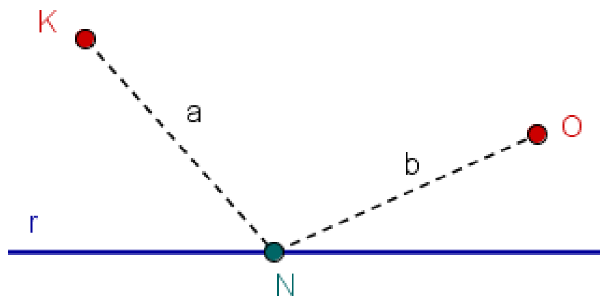
I když různě přemisťujeme vrcholy tětivového čtyřúhelníka $ABCD$ po obvodu kružnice, součin úhlopříček $e \cdot f$ se vždy rovná součtu součinů protilehlých stran $a \cdot c + b \cdot d$.



Shodná a podobná zobrazení

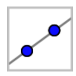
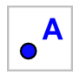
Úloha 5

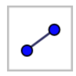
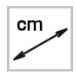
Kovboj hlídá stádo koní (K). Navečer je má zahnat do ohrady (O), ale předtím je má napojit u řeky (přímka r). Najděte optimální polohu napajedla (bod $N \in r$) tak, aby celková délka cesty $a + b$ byla minimální. (Body K, O leží na stejné straně řeky.)



Řešení

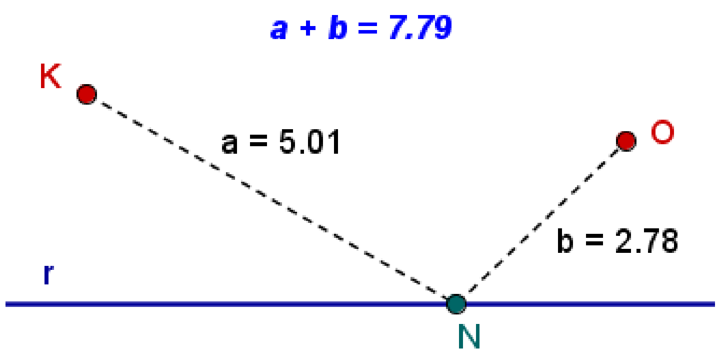
Pokud pracujeme s mladšími žáky, kteří ještě neznají osovou souměrnost, je to pro ně problémová úloha, kterou s nimi můžeme vymodelovat:

1. Do Nákresny umístíme přímku – nástroj *Přímka*. Přímku přemenujeme na r a tvořící body přímky A, B skryjeme. 
2. Nástrojem *Nový bod* umístíme na přímku r bod N, do stené poloroviny vzhledem k r také přidáme body K a O. 

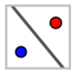
3. Znázorníme obě cesty: úsečka $a = KN$, úečka $b = NO$; nástroj *Úsečka daná dvěma body* nebo zápis `a=Usecka[K,N], b=Usecka[N,O]`. 
4. Změříme délku úsečky a a úsečky b: nástrojem *Vzdálenost* klikneme na úsečku a a na úsečku b. 

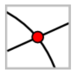
5. Definujeme součet délek ve Vstupním poli: `c=a+b`. Pak zobrazíme celkovou délku cesty nástrojem *Vložit text*, kam zadáme: `"a+b = "+c` 

V tomto jednoduchém modelu lze posouvat bodem N po přímce r a při tom sledovat celkovou délku cesty. Řešením je taková poloha N, při níž je celková dráha nejmenší.

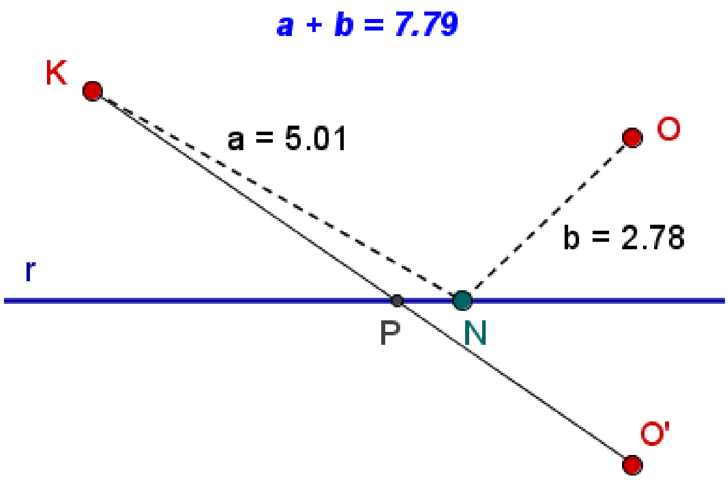


Znají-li žáci osovou souměrnost, stane se řešení úlohy snadnou záležitostí: stačí přidat obraz O' bodu O souměrný podle osy r a dále vytvořit průsečík P spojnice KO' s osou r. Tento průsečík bude řešením úlohy.

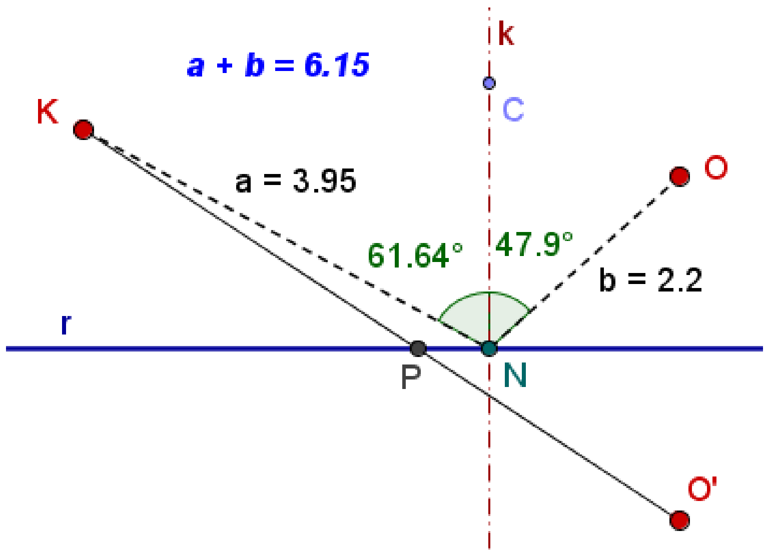
6. Nástrojem *Osová souměrnost* nejprve klikneme na bod O, pak na přímku r. Vznikne obraz O'. 

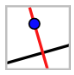
7. Vytvoříme spojnici KO' (zápis `d=Usecka[K,O']`). Nástrojem *Průsečíky dvou objektů* klikneme postupně na d a na r, vznikne bod P. 

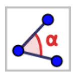
Nyní se můžeme přesvědčit, že nejkratší je cesta právě tehdy, když se bod N s průsečíkem P překrývají.



Do řešení úlohy ještě můžeme vnést fyzikální hledisko – zákon odrazu světla (obecně vlnění). Sestrojíme v bodě N kolmici na přímku r a znázorníme úhel dopadu a úhel odrazu. Tyto úhly se budou rovnat jedině v případě, kdy $N \equiv P$.



8. Nástrojem *Kolmice* nejprve klikneme na bod N, pak na přímku r. Vzniklou kolmici pojmenujeme k a umístíme na ni pomocný bod C. 

9. Nástrojem *Úhel* znázorníme úhel dopadu (v následujícím pořadí klikneme na body C, N, K) a úhel odrazu (klikneme na body O, N, C). 

Úloha 6

Do ostroúhlého trojúhelníka ABC vepište čtverec $KLMN$ tak, aby strana čtverce KL byla součástí základny AB trojúhelníka a ostatní vrcholy čtverce se dotýkaly zbylých stran trojúhelníka.

Řešení

Sestrojíme ostroúhlý trojúhelník ABC a do něj libovolný pomocný čtverec, který jednou stranou spočívá na základně AB trojúhelníka a jeden z vrcholů čtverce je součástí strany AC trojúhelníka. Ke konstrukci výsledného čtverce pak využijeme stejnolehlost.

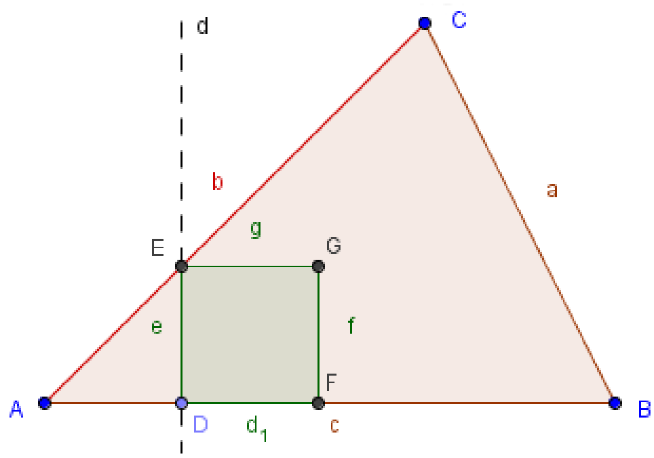
1. Pomocí nástroje *Mnohoúhelník* klikneme na tři různé body do Nákresny a pak opět do výchozího bodu – vznikne trojúhelník ABC.

2. Nástrojem *Nový bod* vytvoříme libovolně bod $D \in AB$.

3. Zapneme nástroj *Kolmice* a klikneme postupně na bod D a pak na stranu AB. Vytvoří se přímka d kolmá na základnu trojúhelníka.

4. Nástrojem *Průsečík* zviditelníme průsečík kolmice d s další stranou trojúhelníka. Vznikl bod E (na obrázku je součástí strany AC).

5. Vybereme nástroj *Pravidelný mnohoúhelník* a klikneme jím nejprve na bod E a pak na D (záleží na pořadí – GeoGebra vytváří další body proti směru hodinových ručiček). Objeví se okno s výzvou „Body“ (zadání počtu vrcholů); potvrdíme výchozí hodnotu „4“ a tak vznikne pomocný čtverec $DFGE$ (viz obrázek).



6. Abychom mohli zjistit koeficient stejnolehlosti, připravíme si polopřímku AG: nástrojem *Polopřímka dvěma body* klikneme postupně na A a G a podobně jako v bodě 4 určíme průsečík této polopřímky s odpovídající stranou trojúhelníka.

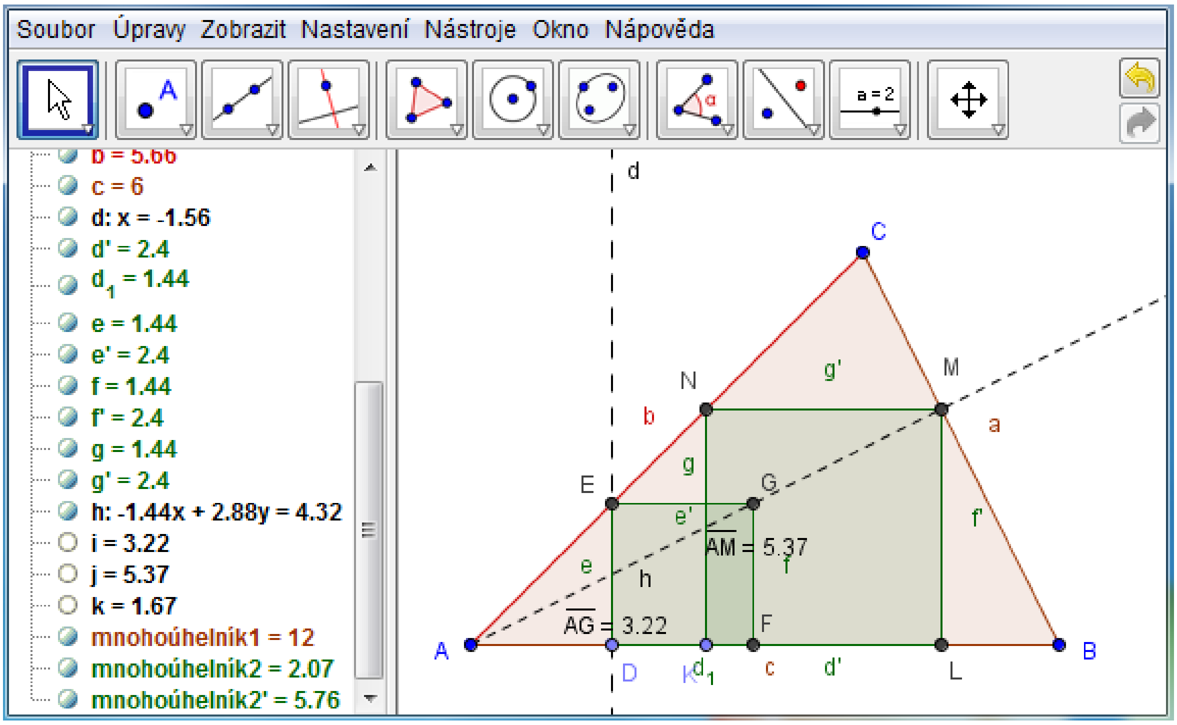
7. Takto vzniklý průsečík je již jedním z vrcholů výsledného čtverce, proto jej přejmenujeme: pravé tlačítko myši > volba *Přejmenovat* na „M“ (nebo rychleji: vybrat daný bod a přímo z klávesnice napsat „M“ a potvrdit).

8. Změříme vzdálenosti bodů AG a AM: nástrojem *Vzdálenost* klikneme postupně na bod A a G. Vzdálenost se objeví v Nákresně a rovněž v Algebraickém okně, kde ji pro lepší přehlednost přejmenujeme (např. na i). Stejně určíme vzdálenost AM, kterou pak přejmenujeme na j.

9. Koeficient stejnolehlosti určený poměrem $k = \frac{|AM|}{|AG|}$ zadáme pomocí Vstupního pole, do něhož zapíšeme: `k = j/i`

10. Finální čtverec vytvoříme nástrojem *Stejnolehlost* ze skupiny nástrojů *Zobrazení*. Nejprve kliknutím vybereme střed stejnolehlosti (bod A), pak vzorový objekt (pomocný čtverec $DFGE$) a v posledním kroku nás GeoGebra vyzve k zadání koeficientu stejnolehlosti – do příslušného pole zapíšeme `k` a potvrdíme.

11. Nakonec ještě přejmenujeme vrcholy K, L, N výsledného čtverce $KLMN$; vrchol splývající s již dříve vytvořeným průsečíkem M můžeme skrýt.



Kuželosečky

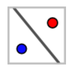
Úloha 7

Najděte rovnici kružnice souměrně sdružené s kružnicí $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ podle přímky $x-y-3=0$.

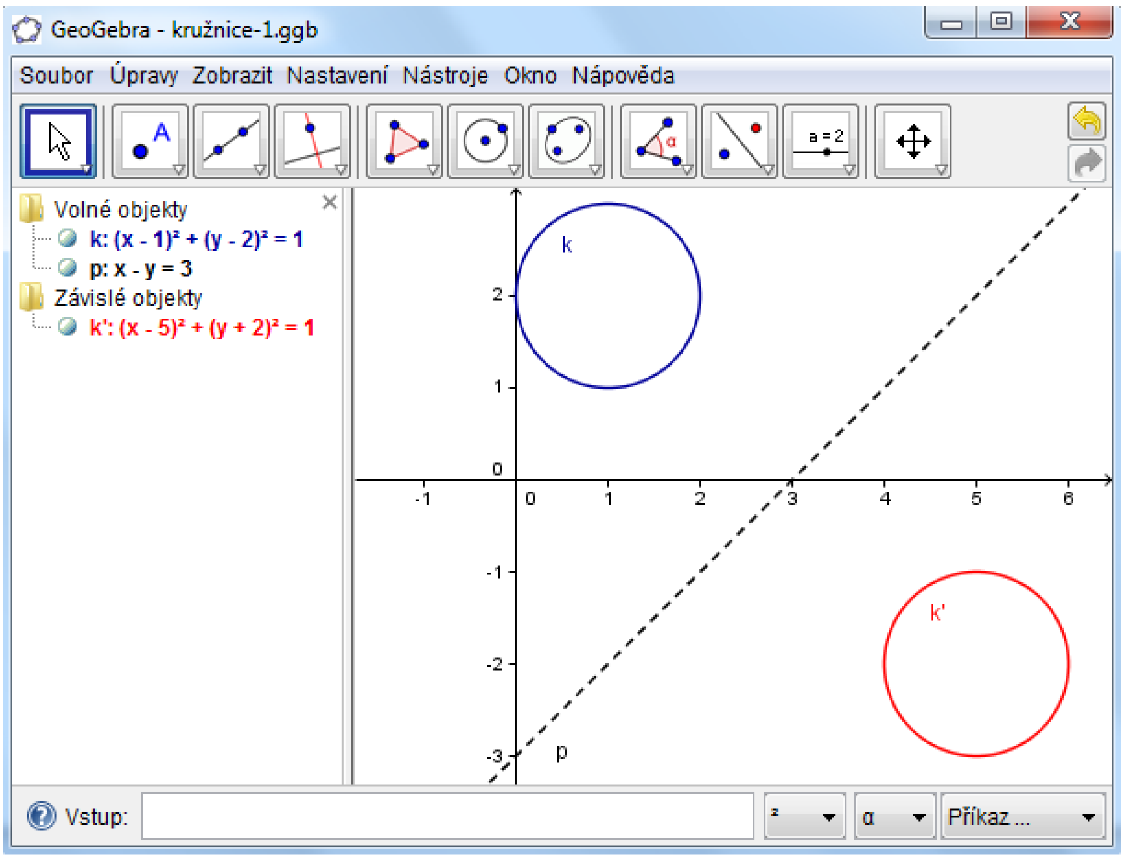
Řešení

Do Vstupního pole (příkazového řádku) zadáme rovnice kružnice a přímky:

- `k: (x − 1)^2 + (y − 2)^2 = 1`
- `p: x − y − 3 = 0`



Myší vybereme nástroj *Osová souměrnost* a postupně klikneme na vzor (kružnice k) a na osu souměrnosti (přímka p). Vznikne obraz kružnice k', jejíž rovnici vidíme v okně Algebry: k': $(x-5)^2+(y+2)^2=1$.

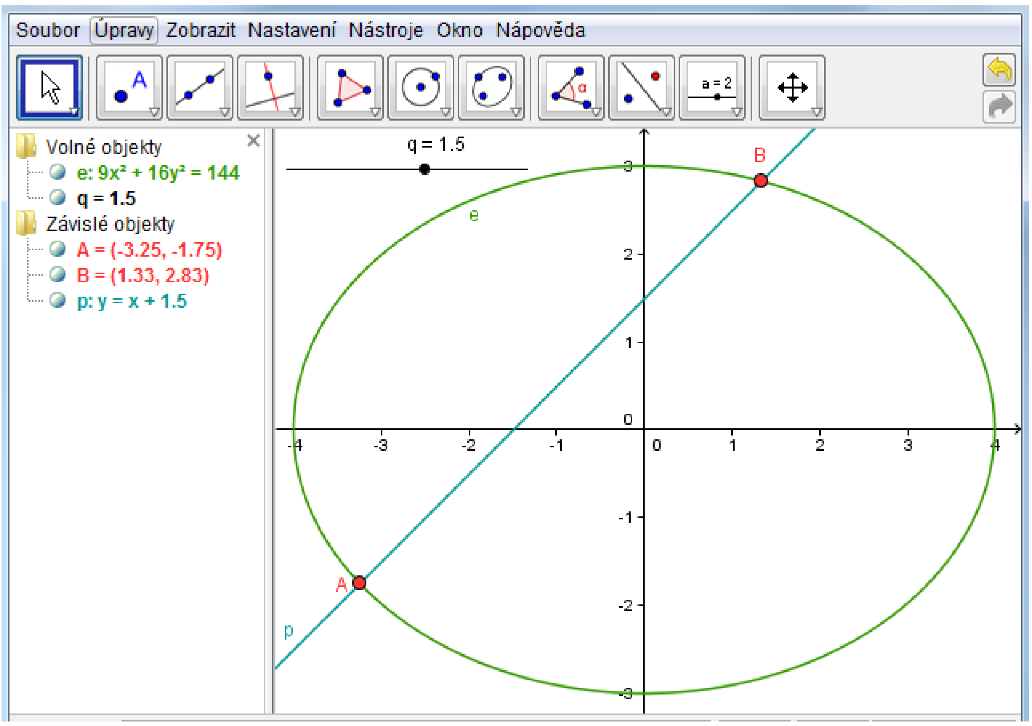


Úloha 8

Určete všechny hodnoty parametru $q \in R$, pro které má přímka p: $y = x + q$ s elipsou e: $9x^2 + 16y^2 = 144$ aspoň jeden společný bod.

Řešení

1. Připravíme posuvník q (parametr v rovnici přímky): od -10 do 10; krok $= 0.1$.
2. Pomocí Vstupního pole (příkazového řádku) zadáme rovnici elipsy e a přímky p a nakonec určíme průsečíky elipsy a přímky:
   - `e: 9 x^2 + 16 y^2 = 144`
   - `p: y = x + q`
   - `Prusecik[e, p]`
3. Výsledek: změnami posuvníku q zjistíme, že pro hodnoty $q \in (-5, 5)$ je přímka p sečnou elipsy (vzniknou dva průsečíky A, B), zatímco pro $q = \pm 5$ je přímka její tečnou (body A, B splynou ve společný dotykový bod). Pro jiné hodnoty parametru q nemají přímka a elipsa žádný společný bod.



Funkce zadané parametricky a polárními souřadnicemi

Úloha 9

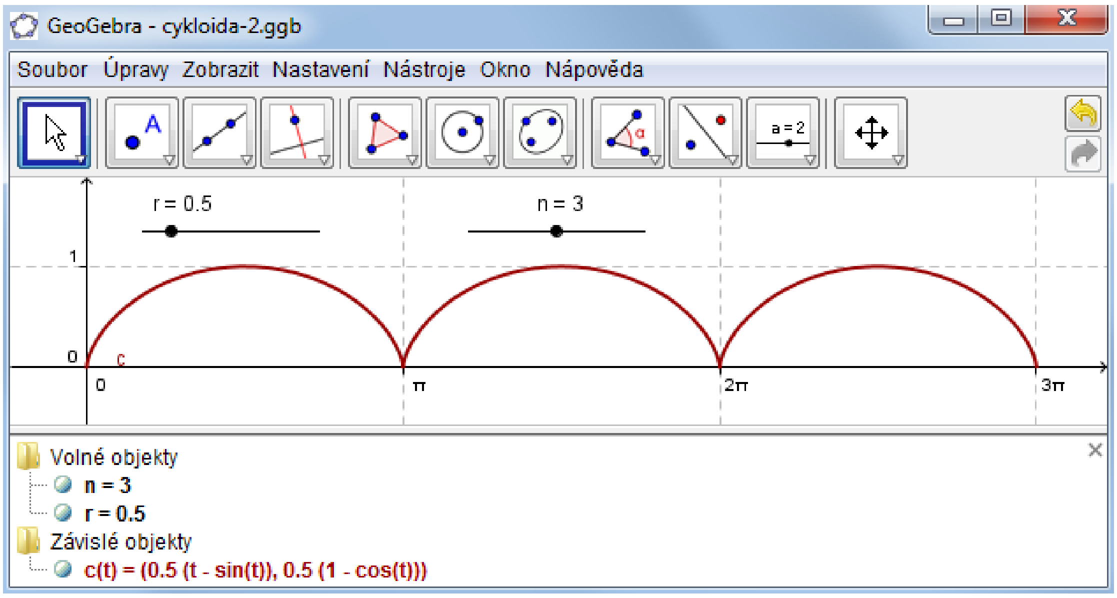
Cykloida je cyklická křivka, kterou vykreslí bod na obvodu kružnice o poloměru r odvalující se po přímce. Obecnou cykloidu lze vyjádřit parametrickými rovnicemi:

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot (t - \sin t) \\ y &= r \cdot (1 - \cos t) \end{aligned}\right\} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \text{ pro jeden oblouk cykloidy}$$

Nakreslete n oblouků obecné cykloidy vzniklé odvalováním kružnice o poloměru r. Křivku umístěte do počátku souřadnicového systému, volte $n \in \langle 1, 5 \rangle$ a $r \in \langle 0{,}2; 2{,}0 \rangle$.

Řešení

1. Připravíme posuvník n pro volbu počtu oblouků cykloidy: dolní mez = 1, horní mez = 5, krok = 1
2. Připravíme posuvník r pro nastavení velikosti oblouků cykloidy: dolní mez = 0.2, horní mez = 2, krok = 0.1
3. Cykloidu c zapíšeme do Vstupního pole příkazem `Krivka[]` s parametrem t:
   `c = Krivka[r*(t-sin(t)), r*(1-cos(t)), t, 0, 2*n*pi]`
4. Graf bude přehlednější, nastavíme-li na ose x jednotky π:
   hlavní menu *Nastavení* (nebo *P na myši*) > *Nákresna* > záložka *Osy* a záložka *OsaX* > v poli *Jednotky* vybrat π



K procvičení

Do stejného obrázku přidejte graf funkce $f(x) = |\sin x|$ a porovnejte průběh oblouků u obou křivek.

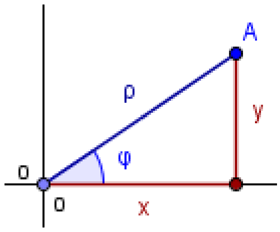
Spirály vznikají skládáním dvou pohybů: bod $A = (x, y)$ se pohybuje po polopřímce, která se současně otáčí okolo některého svého pevného bodu (např. okolo počátku O).

Úloha 10

Vykreslete několik závitů *Archimedovy spirály* zadané rovnicí $\rho = k \cdot \varphi$ ($k \neq 0, \varphi \geq 0$), kde ρ a φ jsou polární souřadnice.

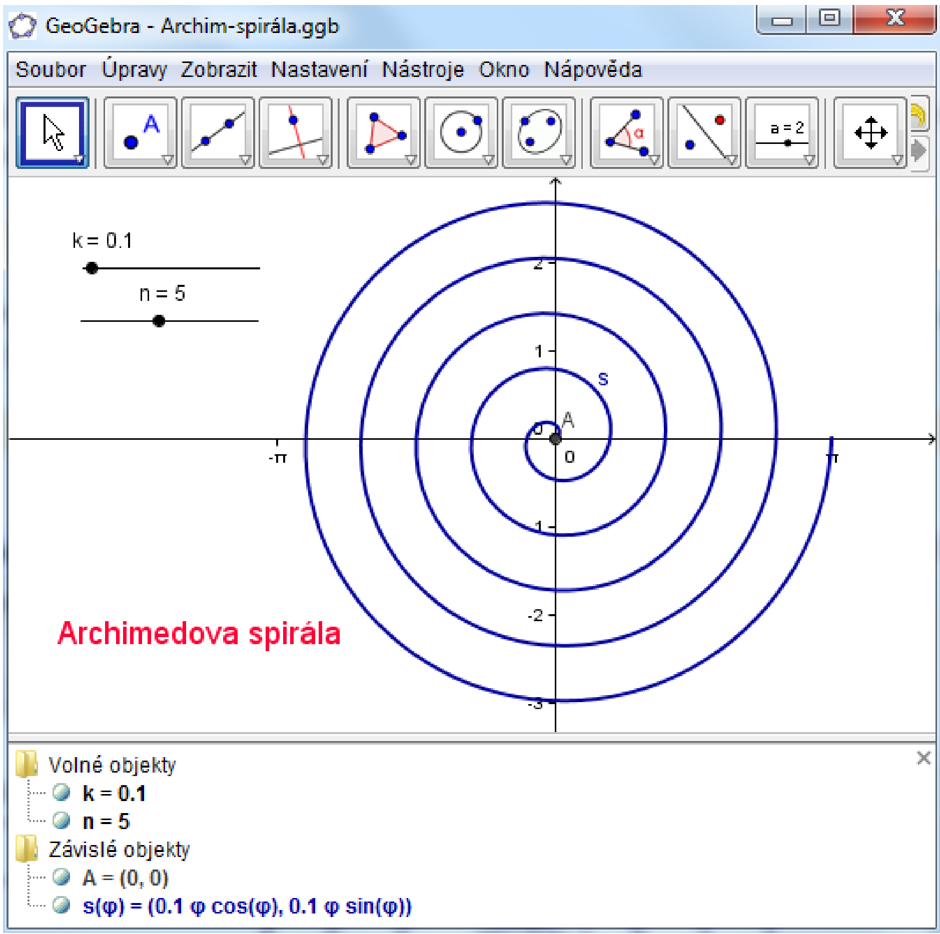
Řešení

Potřebujeme rovnice přechodu od polárních souřadnic ke kartézským (viz obrázek): $x = \rho \cdot \cos\varphi$
$y = \rho \cdot \sin\varphi$



Další postup je podobný jako v předchozí úloze:

1. Definujeme dva posuvníky: n (volba počtu závitů spirály – od 1 do 5; krok = 1) a koeficient spirály k (od 0 do 1; krok = 0.05)
2. Spirálu s zadáme do Vstupního pole příkazem `Krivka[]` s parametrem φ, do prvních dvou výrazů použijeme přechodové rovnice, kam za ρ dosadíme z rovnice spirály:
   `s = Krivka[k φ cos(φ), k φ sin(φ), φ, 0, 2 n pi]`



Směrnice tečny, extrémy funkce

Úloha 11

Funkce $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x + \cos 2x$ je definována na uzavřeném intervalu $\langle -2{,}5; 5{,}5 \rangle$.

a) Sestrojte graf funkce $f(x)$.

b) Vytvořte bod A na křivce $f(x)$ a její tečnu v bodě A.

c) Sledujte, jak se mění směrnice tečny, vyhledejte lokální extrémy funkce $f(x)$ na jejím definičním oboru.

d) Sledujte chování oskulační kružnice ke křivce $f(x)$ v bodě A.

Řešení

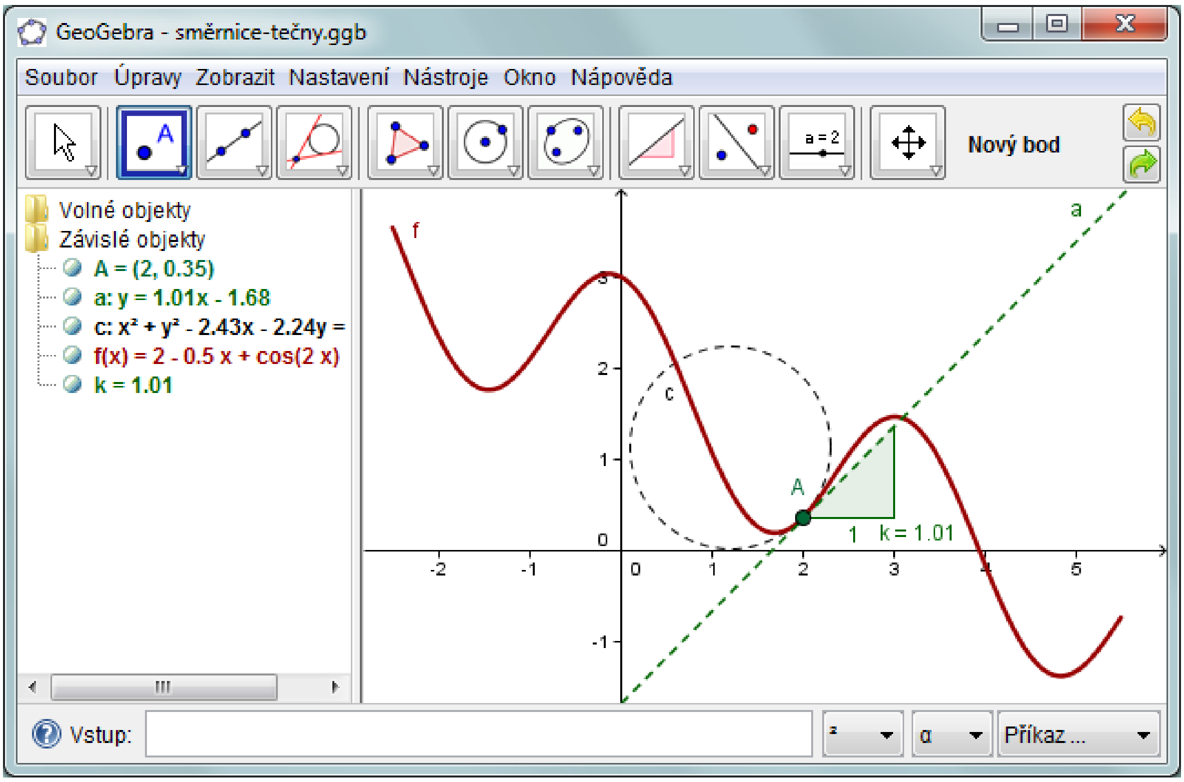
a) Do Vstupního pole zapíšeme: `f = Funkce [2 - 0.5 x + cos(2 x), -2.5, 5.5]`

b) Nástrojem *Nový bod* klikneme na křivku $f(x)$ v Nákresně, vytvoří se bod A na křivce; dále nástrojem *Tečny z bodu* klikneme nejprve na A, pak na křivku – v bodě A vznikne tečna a. (Stejný efekt by měl zápis `Tecna[A, f(x)]` do Vstupního pole.)

c) Směrnici tečny dostaneme do grafu nástrojem *Spád*, kterým klikneme na bod A, nebo zápisem do Vstupního pole: `Smernice[a]`.

d) Do Vstupního pole zapíšeme `OskulacniKruznice[A, f(x)]`.

Budeme-li posouvat bodem A po křivce $f(x)$, můžeme pozorovat polohu tečny a velikost její směrnice: v místech s nulovou směrnicí – tečna je vodorovná – se vyskytují lokální extrémy funkce.



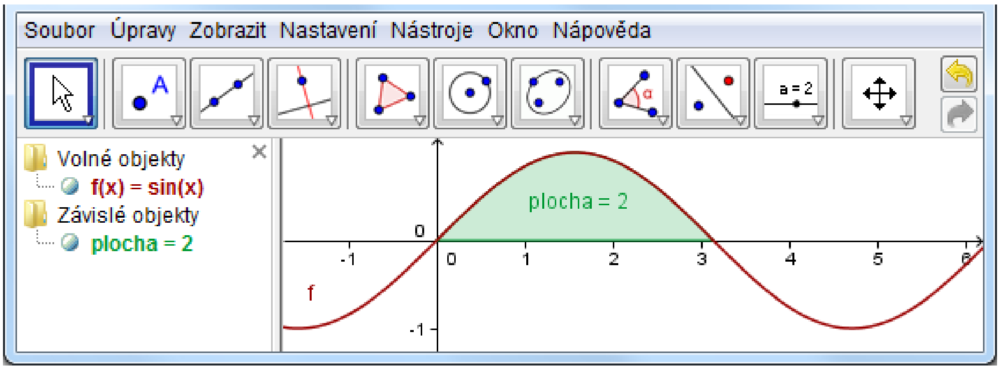
Obsah plochy ohraničené křivkami

Úloha 12

Vypočtěte velikost plochy ohraničené první vlnou funkce $y = \sin x$ a osou x.

Řešení – následující příkazy zapíšeme do Vstupního pole:

- `f(x) = sin(x)`
- `plocha = Integral[f(x), 0, pi]`



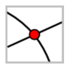
Úloha 13

Zobrazte průběh exponenciální funkce $f(x) = 2^x$ a kubické paraboly $g(x) = \frac{1}{10}x^3 + 2$. Vypočtěte velikost plochy, kterou grafy těchto dvou funkcí vymezují.

Řešení

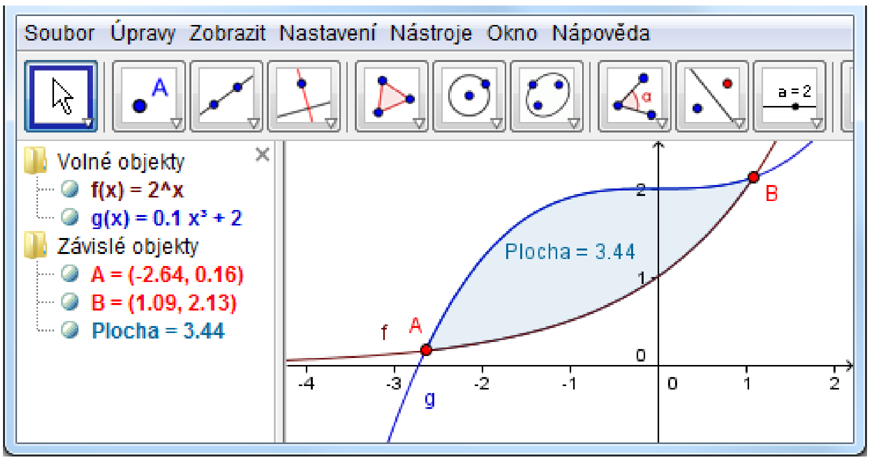
Obě funkce zadáme do Vstupního pole (příkazového řádku):

- `f(x) = 2^x`
- `g(x) = 0.1 x^3 + 2`



Myší vybereme nástroj *Průsečík* a postupně klikneme na křivku $f(x)$ a $g(x)$. Tím vzniknou průsečíky A, B, jejichž x-ové souřadnice budou tvořit dolní a horní integrační mez. Na závěr zadáme do Vstupního pole příkaz:

- `Plocha = Integral[g(x), f(x), x(A), x(B)]`



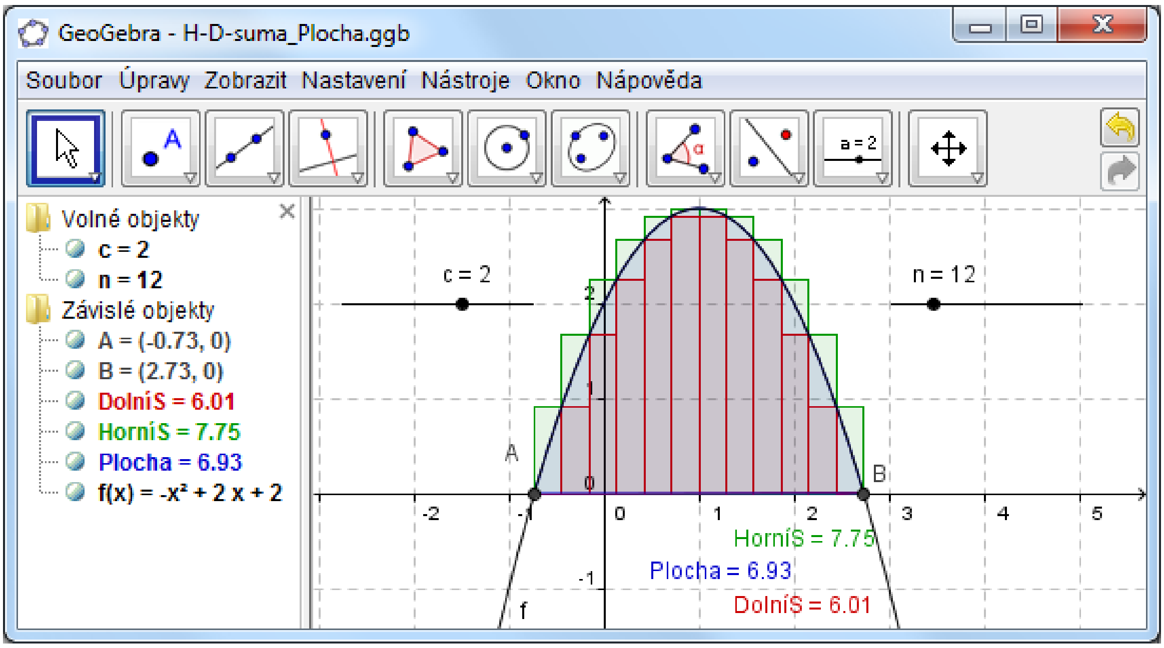
Úloha 14

Určete plochu ohraničenou osou x a grafem kvadratické funkce $f(x) = -x^2 + 2x + c$ s parametrem $c \in \langle -1{,}4; 4{,}0 \rangle$. Graficky znázorněte konstrukci integrálu – velikost dané plochy lze považovat za limitu, k níž konverguje tzv. *dolní* a *horní součet*.

Řešení

1. Připravíme posuvník c (parametr kvadratické funkce): od -1.4 do 4; krok $= 0.1$. To nám umožní dynamicky posouvat graf a měnit velikost vymezené plochy.
2. Definujeme posuvník n (od 1 do 50, krok $= 1$), který bude představovat rozdělení intervalu pro dolní a horní součet na n částí.
3. Do Vstupního pole zapíšeme příkazy pro zadání funkce $f(x)$ (určíme průsečíky s osou x), výpočet velikosti vymezené plochy a pro vytvoření dolního a horního součtu:
   - `f(x) = -x*x + 2*x + c` (+ určit průsečíky – viz předchozí úloha)
   - `Plocha = Integral[f(x), x(A), x(B)]`
   - `Dolní = DolniSoucet[f(x), x(A), x(B), n]`
   - `Horní = HorniSoucet[f(x), x(A), x(B), n]`

Hotový model (viz obrázek): tažením posuvníků c a n měníme velikosti plochy vymezené grafem a nastavujeme dělení intervalu pro dolní (horní) součty.



K procvičení

Určete velikost plochy ohraničené zdola parabolou $f(x) = x^2 - 4\,x$ a shora grafy funkcí $g(x) = \ln x$ a $h(x) = 4 - x$.

Základy vyšší algebry – matice

Úloha 15

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -17 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

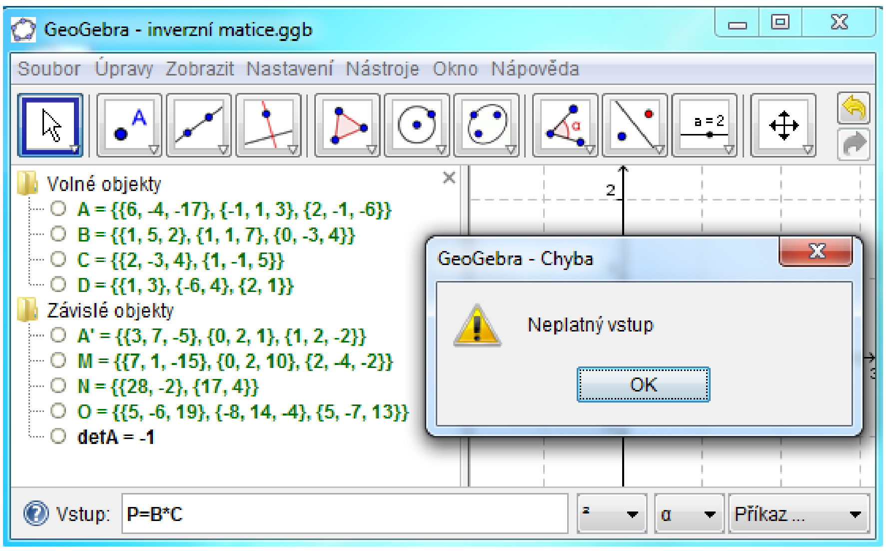
Určete: a) součet matic $A + B$
b) inverzní matici k matici A
c) determinant matice A
d) součiny matic $C \cdot D$, $D \cdot C$ a $B \cdot C$, pokud existují.

Řešení

Budeme pracovat se Vstupním polem (příkazovým řádkem) *GeoGebry*. Zadávané objekty a požadované výsledky se zobrazují v okně Algebra – to lze myší rozšířit na úkor Grafického okna, které nyní nevyužijeme. Po zápisu odesíláme každý řádek klávesou *Enter*:

- `A = {{6, -4, -17}, {1, 1, 3}, {2, -1, -6}}`
- `B = {{1, 5, 2}, {1, 1, 7}, {0, -3, 4}}`
- `C = {{2, -3, 4}, {1, -1, 5}}`
- `D = {{1, 3}, {-6, 4}, {2, 1}}`
- `M = A + B`
- `A' = Invert[A]`
- `detA = Determinant[A]`
- `N = C * D`
- `O = D * C`
- `P = B * C`

Výsledky se průběžně zobrazují v okně Algebry, po zadání posledního příkazu vyskočí okno s hláškou „Neplatný vstup“ (viz obrázek), neboť součin těchto matic není definován.



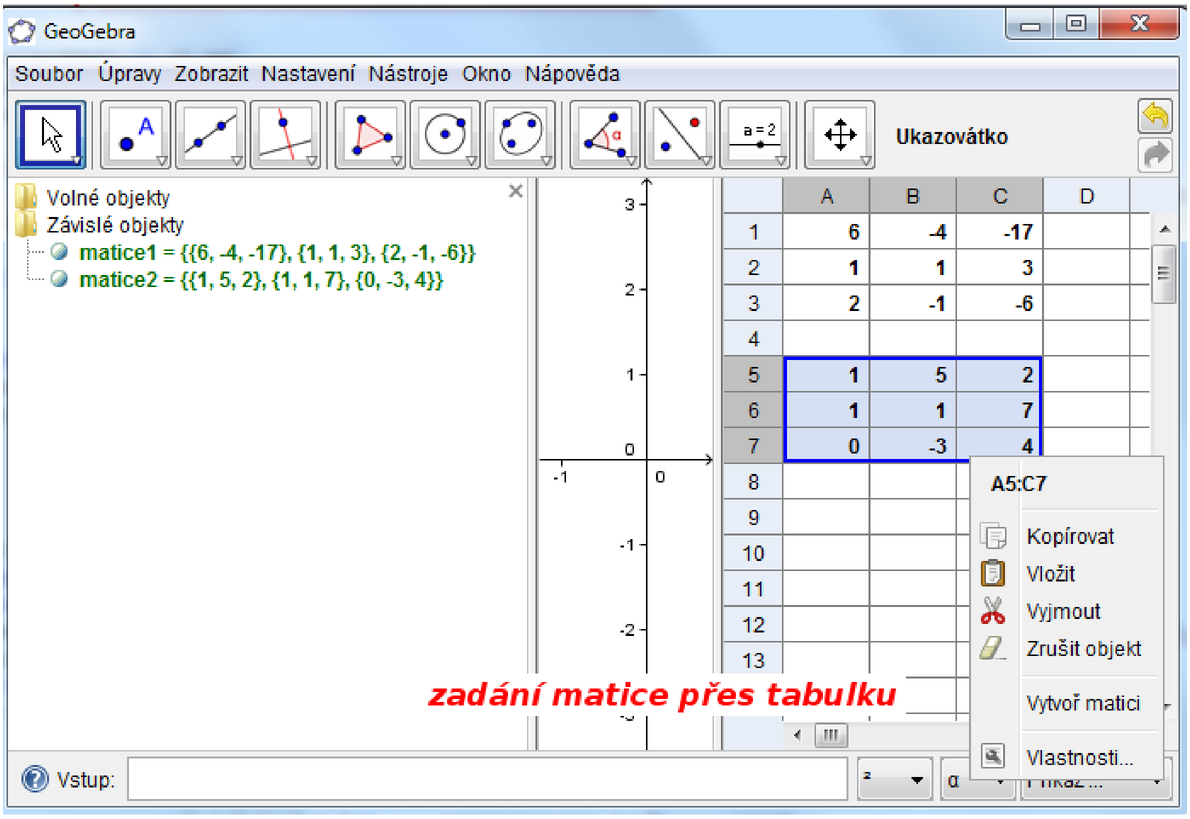
K procvičení

Ověřte pomocí *GeoGebry*, že vynásobením $A \cdot A'$ nebo $A' \cdot A$ vznikne jednotková matice. Vypočtěte determinant jednotkové matice.

Tip

Zadávání matice do systému *GeoGebry* bude mnohem přehlednější, využijeme-li tabulkové prostředí (klávesová zkratka *Ctrl + Shift + S* nebo myší – hlavní menu – *Zobrazit* > *Tabulka*). Matici pak vložíme ve třech krocích:

- každý prvek matice zapíšeme do samostatné buňky; řádky i sloupce musí odpovídat zadání, všechny buňky tvoří souvislou oblast
- provedeme výběr této oblasti
- kliknutím pravého tlačítka na myši vyvoláme kontextovou nabídku, z níž vybereme volbu Vytvoř matici (viz obrázek)



Takto zadávané matice se postupně objevují v okně Algebra s názvy matice1, matice2, atd. Nakonec je tedy vhodné je přejmenovat, aby názvy matic odpovídaly zadání úlohy.

Soustavy rovnic

Úloha 16

Řešte soustavu rovnic o neznámých x, y, z, w:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z \phantom{{}+2w} &= 5 \\ x + 2y - 3z + 2w &= 4 \\ 3x + 4y + 2z - 2w &= 9 \\ -x + y - z + w &= 2 \end{aligned}$$

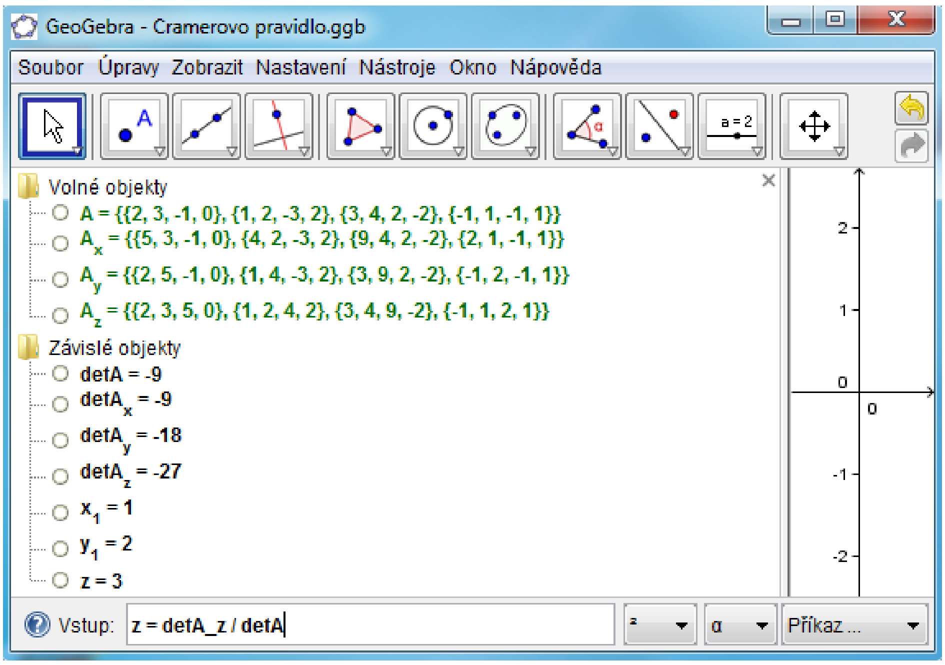
Řešení

Použijeme *Cramerovo pravidlo*: určíme determinant soustavy $|A|$ a determinant $|A_x|$; matice A_x vznikne z původní matice A nahrazením 1. sloupce sloupcem absolutních členů. Pro $|A| \neq 0$ je pak první kořen soustavy $x = \frac{|A_x|}{|A|}$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -9\,, \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 2 \\ 9 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -9\,, \quad x = \frac{|A_x|}{|A|} = 1.$$

Stejně postupujeme u dalších neznámých a dostaneme: $y = 2,\ z = 3,\ w = 4$.

GeoGebra: Postupně zadáme všech pět matic $A, A_x, \ldots A_w$, jejich determinanty a výpočet kořenů (podobně jako v předchozí úloze). V okně Algebry se pak zobrazí výsledky:



Poznámka: Kořeny x, y rovnic označujeme odlišně (např. pomocí indexů – x_1, y_1), jinak je bude GeoGebra považovat za přímky, které nově pojmenuje (např. a: $x = 1$, b: $y = 2$).

Pythagorova věta – dynamický model

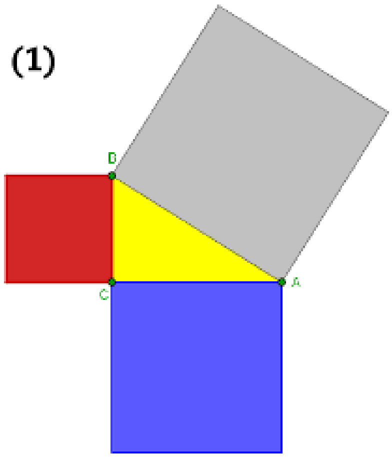
Úloha 17

Vytvořte dynamický model pro znázornění vztahu mezi stranami pravoúhlého trojúhelníka (ukažte geometricky platnost Pythagorovy věty).

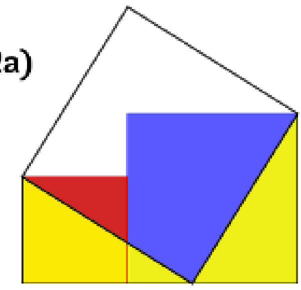
Řešení

Model vytvoříme ze dvou obrázků. První obrázek bude statický a bude znázorňovat pravoúhlý trojúhelník a tři čtverce sestrojené nad dvěma odvěsnami trojúhelníka a jeho přeponou `(1)`. Druhý obrázek bude dynamický: z jeho dvou krajních fází `(2a)` a `(2b)` bude možné uvidět, že obsah čtverce nad přeponou je stejný jako součet obsahů čtverců nad odvěsnami. Svou roli hrají i barvy – ty objekty, které mají v jednotlivých obrázcích stejné barvy, jsou shodné.

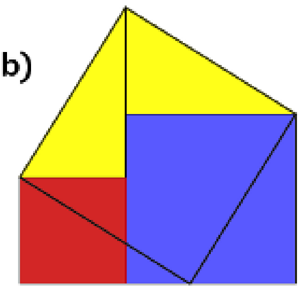
(1)



(2a)



(2b)



Postup

1. V Nákresně zobrazíme osy a vrchol pravého úhlu trojúhelníka (bod C) umístíme do počátku souřadnického systému.

2. Připravíme dva posuvníky: a a b pro volbu délky obou odvěsen trojúhelníka; rozsahy mohou být např. od 1 do 3 u odvěsny a a od 3 do 5 u odvěsny b; krok zvolíme 0.1.

3. Vrchol A trojúhelnka získáme pomocí nástroje *Kružnice daná středem a poloměrem*. Středem kružnice je bod C a poloměrem hodnota posuvníku b; vytvoříme průsečíky této kružnice s osou x: levý skryjeme, pravý pojmenujeme A. Stejným postupem získáme vrchol B (horní průsečík kružnice se středem C a poloměrem a s osou y).

4. Nástrojem *Mnohoúhelník* dokončíme trojúhelník ABC a vybarvíme (např. žlutou).

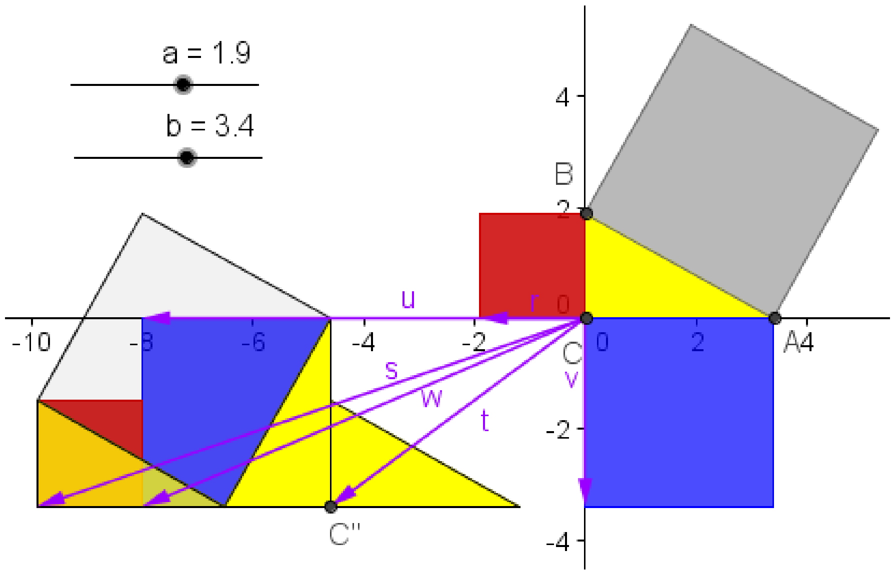
5. Sestrojíme čtverce nad jednotlivými stranami: pomocí nástroje *Pravidelný mnohoúhelník* klikneme postupně na body C a B (pořadí je důležité) a následně v nabídnutém políčku potvrdíme výchozí hodnotu „4“. Vznikne tak čtverec, který je na obrázku `(1)` vybarven červeně. Podobně sestrojíme další dva čtverce a opatříme je vhodnými barvami.

6. První obrázek modelu je hotov, pro konstrukci druhého si připravíme vektory posunutí $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{r}, \vec{s}$ a $\vec{t}$. Zadáme je např. pomocí Vstupního pole následujícími zápisy:
   - `u = (-8, 0)`
   - `v = (0, -b)`
   - `w = u + v`
   - `r = (-a, 0)`
   - `s = r + w`
   - `t = (-8+b, -b)`

7. Druhý obrázek vytvoříme tak, že všechny tři čtverce necháme zobrazit v posunutí (lze použít nástroj *Posunutí* nebo zápis ve Vstupním poli) o následující vektory:

   čtverec nad odvěsnou AC (modrý) ...... o vektor $\vec{u}$
   čtverec nad odvěsnou BC (červený) ...... o vektor $\vec{w}$
   čtverec nad přeponou AB (šedý) ...... o vektor $\vec{s}$

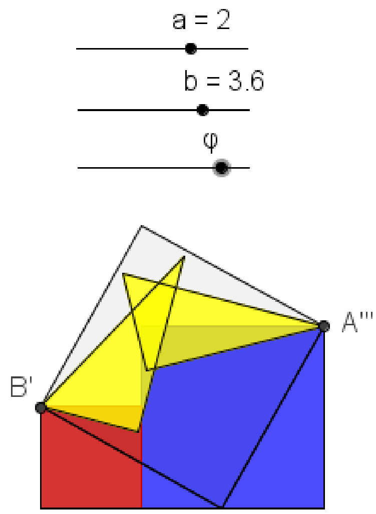
8. Vytvoříme také dva obrazy žlutého trojúhelníka: první vznikne jeho posunutím o vektor $\vec{s}$. Druhý obraz vznikne ve složeném zobrazení: nejprve posunutím o $\vec{t}$ a následně otočením kolem bodu C'' o 90° proti směru hodin (viz obrázek). Obraz posunutý o vektor $\vec{t}$ skryjeme, otočený obraz ponecháme.



9. Dynamiku druhého obrázku zajistíme posuvníkem φ pro úhel otočení: $\varphi \in \langle 0°, 90° \rangle$, krok 0.01.

10. Dále necháme oba žluté trojúhelníky zobrazit v otočení: levý kolem bodu B' o úhel φ proti směru hodinových ručiček, pravý kolem bodu A''' o úhel φ po směru hodinových ručiček (viz obrázek vpravo).

11. Pro lepší viditelnost zvýrazníme strany otočených trojúhelníků úsečkami tmavé barvy, zatímco jejich původní vzory skryjeme. Otáčení trojúhelníků pak ovládáme myší tažením za posuvník φ.



GeoGebra ve fyzice – skládání kmitů

Úloha 18

Sestavte model vzniku nárazového kmitání v akustice – vznik **rázů**. V modelu umožněte nastavování frekvencí f_1, f_2 obou kmitavých pohybů a fázového posunutí φ mezi nimi.

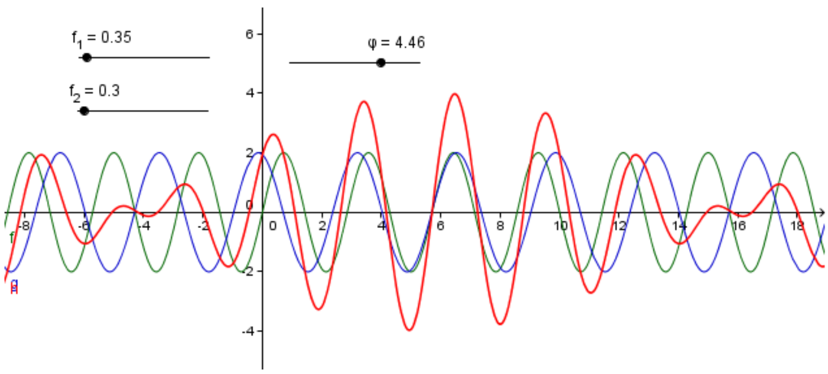
Řešení

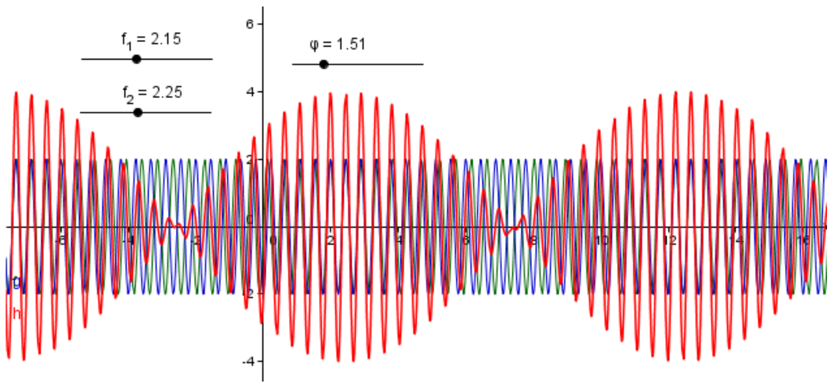
Rázy (zázněje) vznikají skládáním dvou kmitání blízkých frekvencí. Budeme předpokládat, že oba kmitavé pohyby mají harmonický průběh a jsou vyjádřeny rovnicemi:

$$y_1 = A \cdot \sin \omega_1 t, \quad y_2 = A \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi)$$

kde $\omega_1 = 2\pi f_1$ a $\omega_2 = 2\pi f_2$ jsou úhlové frekvence kmitů a amplituda (maximální výchylka) A je u obou kmitavých pohybů stejná.

1. Připravíme si celkem tři posuvníky: dva z nich pro frekvence – pojmenované f_1, f_2 (rozsah od 0.1 do 5 jednotek, krok 0.05) a třetí pro fázový posun – pojmenovaný φ (rozsah od 0 do 2π, krok 0.05).
2. Rovnice pro kmitavý pohyb zadáme do Vstupního pole (pro správné vykreslení grafů místo času t zadáme proměnnou x, amplitudu zvolíme např. $A = 2$):
   - `f(x) = 2 sin(2 pi f_1 x)`
   - `g(x) = 2 sin(2 pi f_2 x -` φ`)`
   - `h(x) = f(x) + g(x)`
3. Pomocí posuvníků f_1, f_2 a φ nastavujeme poměr frekvencí a fázový posun a sledujeme průběh složených kmitů (funkce $h(x)$ znázorňuje vznik rázů).

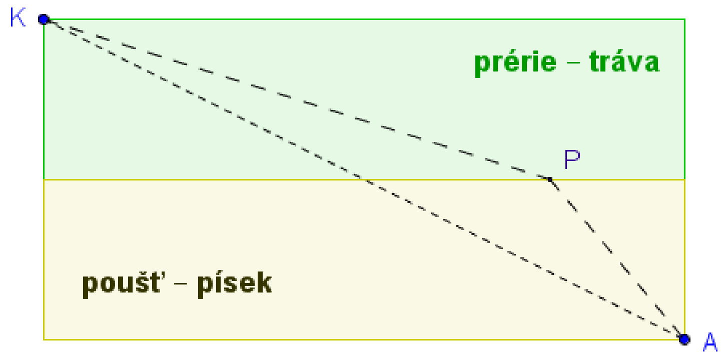




Jak by Karel May vysvětlil, proč se světlo láme

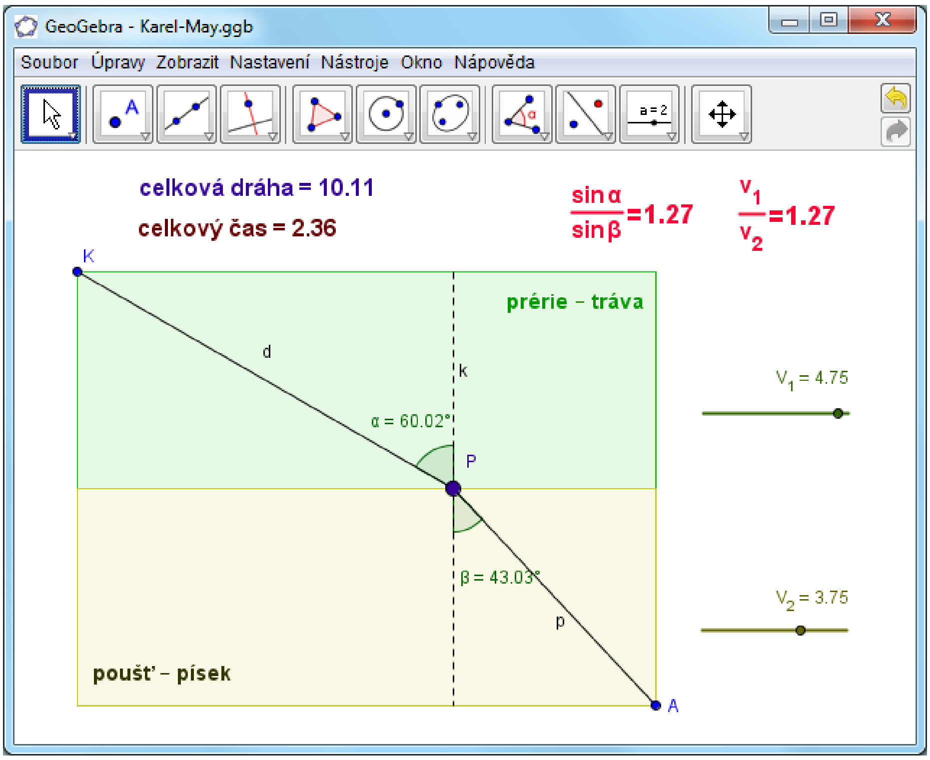
Úloha 19

Old Shatterhand utíká před zlými Komanči a potřebuje se co nejrychleji dostat k Vinnetouovi, který ho spolu s dalšími Apači může zachránit. Během svého přesunu z bodu K do bodu A (viz obrázek) však jeho kůň musí projet dvěma různými prostředími: travnatou prérijí a pouštním pískem, přičemž na písku se kůň pohybuje mnohem pomaleji než na trávě. Poraďte Old Shatterhandovi, jak má nasměrovat svého koně, aby jeho cesta z K do A proběhla co nejrychleji.



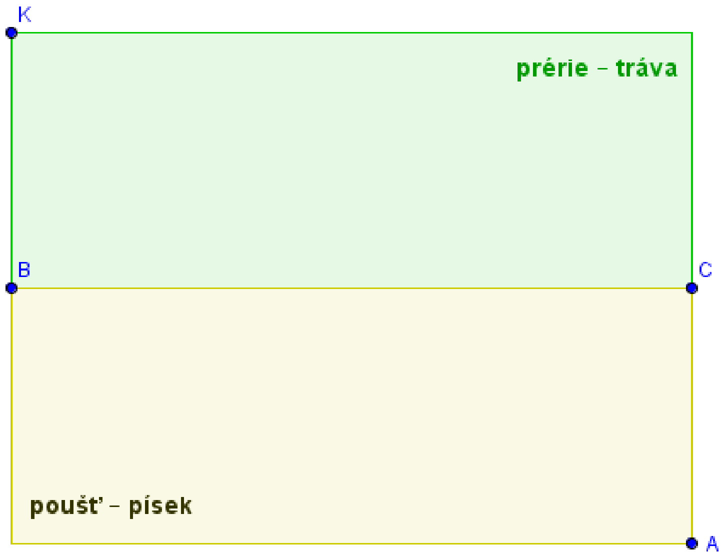
Řešení

V prostředí GeoGebry vytvoříme model obsahující tři dynamické prvky – pro nastavování rychlosti koně na trávě v_1 a v písku v_2 a polohy bodu P na rozhraní obou prostředí. Do modelu zahrneme výpočet celkové dráhy koně a celkového času. Přidáme výpočet poměrů $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ a $\dfrac{v_1}{v_2}$, aby vynikla souvislost se zákonem lomu.



Postup

1. Pro snazší a přesnější kreslení zapneme mřížku (hlavní menu *Zobrazit* > *Mřížka*). Vytvoříme úsečku BC (hranice trávy a písku) a dva čtyřúhelníky: horní = tráva, dolní = písek. Jejich vrcholy skryjeme kromě dvou bodů – výchozího K a cílového A (viz obrázek). Pomocí nástroje *Vložit text* můžeme oba čtyřúhelníky pro lepší přehlednost doplnit komentářem (prérie – tráva, poušť – písek).



2. Nástrojem *Nový bod* vytvoříme bod P vázaný na úsečku BC, krajní body úsečky pak skryjeme. Přidáme další dvě úsečky představující dráhy koně po trávě a na písku: $d = KP$, $p = PA$.

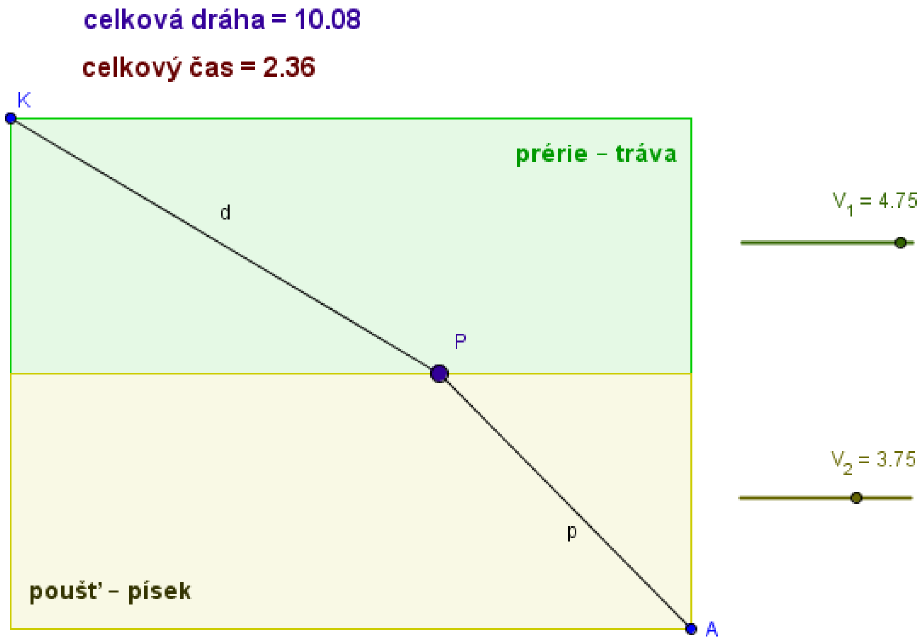
3. Určíme celkovou dráhu koně – zápis `r = d + p` do Vstupního pole. Tuto hodnotu necháme zobrazit v Nákresně pomocí nástroje *Vložit text*, do jehož okna provedeme zápis: `"celková dráha = " + r` (text v uvozovkách je řetězec, znaménko + představuje operaci zřetězení, za text v uvozovkách se tedy vypíše hodnota r).

4. Přidáme dva posuvníky pro nastavení rychlosti koně v_1 na trávě a v_2 na písku (volíme shodné názvy, zapíšeme tedy `v_1` a `v_2`, rozsah od 1 do 5, krok = 0.25).

5. Určíme celkový čas koně: $t = t_1 + t_2 = \frac{d}{v_1} + \frac{p}{v_2}$; provedeme zápis do Vstupního pole: `t = d/v_1 + p/v_2` a potvrdíme.

6. Také celkový čas necháme zobrazit v Nákresně – podobně jako v kroku 3: do okénka nástroje *Vložit text* zapíšeme: `"celkový čas = " + t`

První část našeho modelu je hotova (viz následující obrázek) a jeho dynamika je plně funkční: umožňuje nastavovat různé rychlosti v_1 a v_2 a posouvat bodem P po hranici trávy a písku. Například pro hodnoty $v_1 > v_2$ může žák zjistit, že pokud kůň poběží po nejkratší možné dráze (úsečka KA), bude jeho celkový čas delší, než když svou dráhu „zalomí" v bodě P tak, že delší úsek absolvuje po trávě a kratší po písku. Tímto principem se řídí světlo (obecně vlnění) při přechodu z jednoho prostředí do druhého.



Zatímco pro žáky základních škol a nižších gymnázií bychom model mohli ukončit na této úrovni, středoškolákům ještě připomeneme platnost Snellova zákona lomu: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{v_1}{v_2}$.

7. V bodě P sestrojíme kolmici na rozhraní (nástroj *Kolmice*). Pro lepší vzhled vytvoříme kolmici jako svislou úsečku k – nejprve vyznačíme průsečíky kolmé přímky s horní a dolní stranou příslušných obdélníkových oblastí a pak nástrojem *Úsečka dvěma body* tyto průsečíky spojíme; úsečku přejmenujeme na k a původní kolmou přímku skryjeme.

8. Vyznačíme úhel dopadu α a úhel lomu β: použijeme k tomu nástroj *Úhel*, kterým klikneme vždy na tři body v příslušné obdélníkové oblasti. Dojde k vyznačení úhlů v obrázku a spolu s jejich názvy α, β se zobrazí i velikosti.

9. K prezentaci Snellova zákona lomu si nadefinujeme hodnoty dvou zlomků zápisem do Vstupního pole: `z_1 = sin(`α`)/sin(`β`)` – podíl sinů úhlů, a dále `z_2 = v_1/v_2` – podíl rychlostí.

10. Jako poslední krok necháme v Nákresně oba uvedené poměry zobrazit: opět použijeme nástroj *Vložit text*, tentokrát v jeho okně použijeme navíc syntaxi LaTeXu, neboť potřebujeme zapsat zlomek. Kliknutím zaškrtneme volbu LaTeX vzorec a do připraveného prostředí, tj. mezi znaky `$ $` vepíšeme požadovaný zlomek pomocí syntaxe LaTeXu. Zápis pak bude mít tvar: `"$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=$"+z_1`. Podobně zadáme i druhý zlomek: `"$\frac{v_1}{v_2}=$"+z_2`.

11. Závěr: při určitém poměru rychlostí $\frac{v_1}{v_2}$ je potřeba najít takovou polohu bodu P, při níž je celkový čas minimální. To platí právě tehdy, když je splněn Snellův zákon lomu a platí: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$.

Modelování mechanických zařízení – pohyb pístu

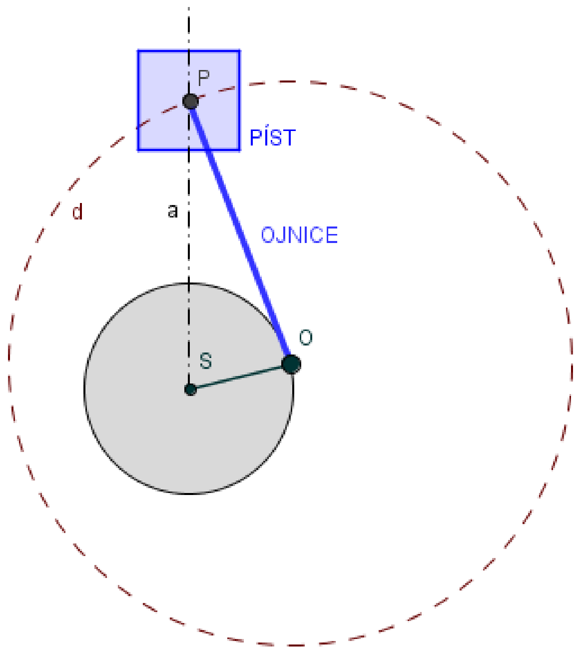
Úloha 20

Vytvořte geometrický model pohybujícího se pístu a ojnice ve válci spalovacího motoru.

Řešení

GeoGebra umožňuje manipulaci s geometrickými objekty a s tím související objevování některých zákonitostí. Toto „znovuobjevení" má pak daleko hlubší vzdělávací efekt než pouhé sdělování skutečností žákům.

Cílem je najít bod reprezentující střed P pístu pohyblivého ve svislém směru (směr polopřímky a). Model pístu bude mít správné „chování" tehdy, když délka ojnice bude neměnná. Druhý konec ojnice O bude opisovat kružnici se středem S představující pohyb klikové hřídele. Odtud je už jen krůček k objevu středu pístu P jako průsečíku svislé polopřímky a a kružnice d pevného poloměru se středem v bodě O (viz obrázek).



Postup

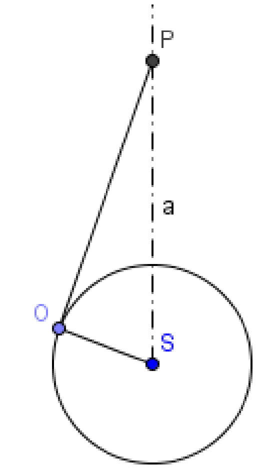
Existuje celá řada možností, jak vytvořit model pohybujícího se pístu. Zde si ukážeme pouze jednoduchý a krátký postup (případný sofistikovaný „tuning" ponecháme na fantazii a tvůrčích schopnostech čtenáře). Veškerá čísla nebo souřadnice uvedená v následujících krocích mají jen orientační charakter.

1. Konstrukci modelu zahájíme kružnicí představující osu klikové hřídele. V Nákresně zobrazíme souřadnicové osy, do jejich počátku umístíme bod S a o něco výše na ose y bod B (např. $B=[0,0.7]$). Vytvoříme kružnici se středem S o poloměru SB (nástroj *Kružnice daná středem a bodem*).

2. Vytvoříme polopřímku $a = SB$ a skryjeme pomocný bod B i souřadnicové osy.

3. Pokračujeme ojnicí: na obvod kružnice se středem S umístíme nový bod O (jeden koncový bod ojnice). Nástrojem *Kružnice daná středem a poloměrem* vytvoříme kružnici $d = (O; 2\,\text{cm})$. Nyní stanovíme průsečík kružnice d s polopřímkou a. Takto vzniklý bod představuje střed pístu (název P). Nástrojem *Úsečka* spojíme body OP (ojnice) a také OS (kliková hřídel). Vypneme zobrazení kružnice d.

Tím je jádro modelu hotovo (viz obrázek na následující straně nahoře). Vyzkoušíme jeho funkčnost: myší pohybujeme bodem O po kružnici a bod P koná posuvný pohyb svislým směrem. Další kroky jsou jen „kosmetické úpravy" – dokončíme píst a obalíme ho válcem.



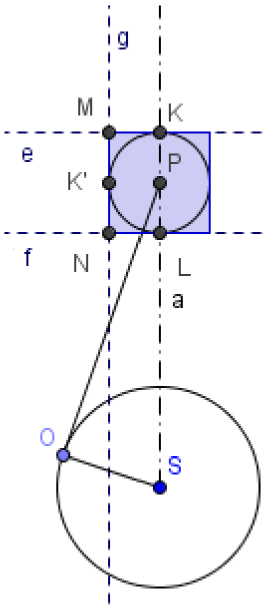
Dokončení pístu (čtverec se středem v bodě P) a válce

4. Nástrojem *Kružnice daná středem a poloměrem* vytvoříme kružnici se středem P o poloměru (přibližně) 0.4 cm.

5. Dále určíme průsečíky (K, L) této kružnice s polopřímkou a; v těchto průsečících sestrojíme tečny (e, f) k dané kružnici.

6. Využijeme shodného zobrazení – otočení: nástrojem *Otočení o úhel* vytvoříme obraz bodu K v otočení o 90° vlevo (K').

7. Z takto vytvořeného obrazu bodu sestrojíme tečnu ke kružnici (tečna g rovnoběžná s polopřímkou a).



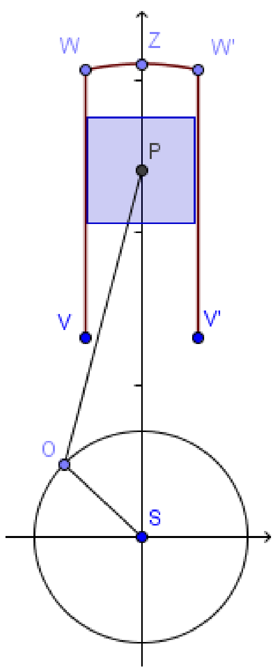
8. Vytvoříme průsečíky tečny g s tečnami e a f $\rightarrow$ body M, N.

9. Nástrojem *Pravidelný mnohoúhelník* nejprve klikneme na bod M, pak na N a následně v nabídnutém políčku potvrdíme výchozí hodnotu „4“. Tím vznikne pravidelný čtyřúhelník (čtverec), kteý představuje model pístu.

10. Nastavíme vlastnosti tohoto čtverce (barva, tloušťka čar, výplň) a skryjeme všechny pomocné konstrukce včetně názvů objektů.

11. Pokračujeme válcem: pro větší pohodlí opět na chvíli zobrazíme osy x, y a mřížku. Nalevo od osy pístu umístíme pomocný bod V (dolní okraj válce; nesmí bránit ojnici v pohybu).

12. Bodem V vedeme rovnoběžku s osou y.



13. Nyní na tuto rovnoběžku umístíme bod W – předpokládaný horní okraj válce (před tím jsme si píst přesunuli do horní úvrati kvůli přesnějšímu stanovení polohy bodu W).

14. Body V a W spojíme úsečkou a vytvoříme její osově souměrný obraz $V'W'$ podle osy y. Pomocnou rovnoběžku i názvy objektů skryjeme.

15. Body W a W' spojíme obloukem WZW' (nástroj *Kruhový oblouk procházející třemi body*).

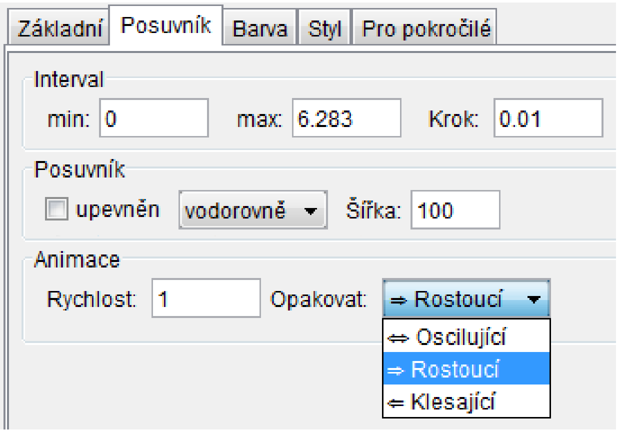
16. Nastavíme vlastnosti obou úseček a oblouku (barvu a tloušťku čar) a skryjeme osy, mřížku a všechny pomocné konstrukce včetně názvů objektů.

Model pístu s „mechanickým ovládáním“ je tím hotov. Z fyzikálního hlediska je pak vhodné zamyslet se nad tím, co je příčinou pohybu a co je důsledkem (v našem modelu pohybujeme bodem O po kružnici, zatímco u reálného motoru pohyb vychází z pístu, jehož posuvný pohyb se převádí na rotaci klikové hřídele).

Zdokonalování modelu

Celý model můžeme obohatit samočinným pohybem pístu. Otáčení klikové hřídele už tedy nebude závislé na našem ručním pohonu myší. To se dá zařídit posuvníkem, který umožňuje zapnout nebo vypnout animaci.

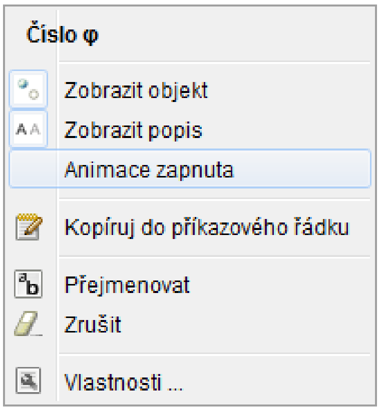
17. Definujeme nový posuvník φ představující úhel: dolní mez $= 0$, horní mez $= 2\pi$ (zápis `2*pi`), krok $= 0.01$; v části Animace nastavíme hodnotu posuvníku Opakovat na Rostoucí.



18. Změříme poloměr kružnice se středem S a toto číslo pojmenujeme r. (V prvním kroku našeho postupu jsme zadali hodnotu 0.7, ale práce s obecnými proměnnými je často výhodnější.)

19. Nový bod X zadáme pomocí Vstupního pole zápisem: `X = (r*cos(`φ`),r*sin(`φ`))` (nebo `X = (0.7*cos(`φ`),0.7*sin(`φ`))`, pokud víme, že hodnotu poloměru nebudeme chtít později měnit). Tím byl bod X definován polárními souřadnicemi (r, φ) a jeho pohyb nyní ovládáme myší nikoliv přímo, ale přes posuvník φ.

20. Nyní potřebujeme, aby se bod X stal dolním koncem ojnice, což vyžaduje předefinování kružnice d. Po dvojkliku na kružnici d v okně Algebra se objeví okno „Předefinovat“. V původní definici `Kruznice[O, 2]` nahradíme bod O bodem X a změnu potvrdíme.



21. Skryjeme bod O a úsečky OS a OP a naopak přidáme nové úsečky XS a XP a upravíme jejich vlastnosti (tloušťka čáry, barva, ...).

22. Spustíme animaci posuvníku φ (pravé na myši > Animace zapnuta).

23. Model dále vylepšíme přidáním **regulace otáček**. Definujeme ještě jeden posuvník, např. t (tempo): dolní mez $= -5$, horní mez $= 5$, krok $= 1$.

24. Upravíme definici bodu X ve Vstupním poli: místo argumentu φ použijeme jeho t-násobek, tedy `X = (r*cos(`φ`*t),r*sin(`φ`*t))`. Tím dosáhneme závislosti rychlosti oběhu bodu X na hodnotě parametru t: pro $t \geq 1$ se kliková hřídel otáčí v kladném smyslu, pro $t \leq -1$ se změní směr otáčení a pro $t = 0$ zůstane bod X a tedy i píst v klidu.

25. Pro větší názornost při ovládání doplníme posuvník t textovým komentářem s nápisy „Vpřed, Stop, Vzad“ a nastavíme jeho umístění svisle; zobrazení posuvníku pro úhel φ můžeme vypnout.

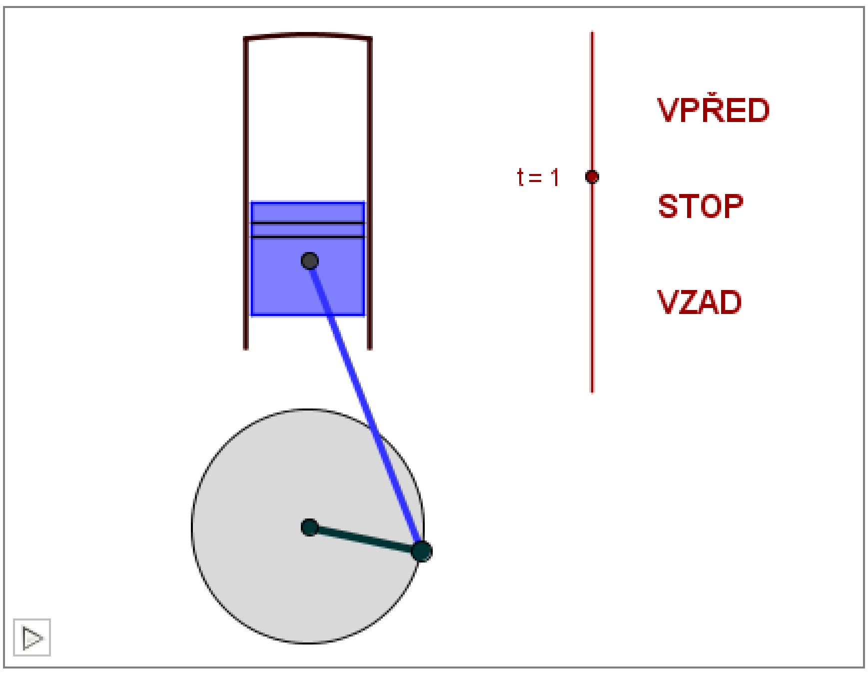
Export do HTML

Hotový model lze vyexportovat do různých formátů – jeden z často používaných je webová stránka: nabídka Soubor > Export > Dynamický pracovní list jako webová stránka (html). V okně, které se objeví, lze zadat název pracovního listu a v záložce Pro pokročilé lze nastavit další parametry (šířka a výška, lze povolit manipulaci s objekty, zobrazit panely nástrojů, apod.).

Potřebujeme-li začlenit aplet z GeoGebry do své webové stránky, která má své specifické rozvržení a stylování, vykopírujeme z právě exportovaného webu naší úlohy v GeoGebře věškerý obsah mezi tagy `<applet>...</applet>` (včetně počátečního a koncového tagu) a vložíme do naší webové stránky mezi připravené značky párového tagu `object`. Situace v zápisu kódu pak vypadá následovně:

```
<object>
  <applet name="ggbApplet" ...>
    ........................
  </applet>
</object>
```

Screen dynamického pracovního listu GeoGebry vyexportovaného jako webová stránka:



Literatura

[1] Gergelitsová, Š.: Počítač ve výuce nejen geometrie – průvodce GeoGebrou, Generation Europe, Praha, 2011.

[2] Dytrych, M., Dobiasová, I., Livňanská, L.: Sbírka úloh z matematiky – geometrie a funkce, Fortuna, Praha, 2001.

[3] Bušek, I., Mannová, B., Šedivý, J., Riečan, B.: Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií, SPN, Praha, 1987.

[4] Vaníček, J.: Metodika použití dynamické geometrie při vyučování na ZŠ a SŠ, http://www.pf.jcu.cz/cabri/metodika/.

[5] Výukové materiály Cabri Geometrie: http://www.pf.jcu.cz/p-mat/.

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento výukový materiál vznikl jako součást grantového projektu Gymnázia Kroměříž s názvem *Beznákladové ICT pro učitele* realizovaného v letech 2009–2012. Projekt je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.

www.gymkrom.cz/ict