

GeoGebra – rychlý start

velmi stručná příručka k programu GeoGebra

GeoGebra je svobodný výukový matematický program, který zahrnuje dynamickou geometrii, algebru a matematickou analýzu.

Dají se v něm vytvářet takové konstrukce jako body, vektory, úsečky, přímky, kruhové výseče, kuželosečky, grafy funkcí a další objekty, které lze následně dynamicky upravovat myší. Na druhé straně umožňuje také přímý vstup pomocí zápisů důvěrně známých ze středoškolské matematiky, jako např. $p: 3x + 4y = 7$; $k: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$; $f(x) = \sin(3x) + 2$. Kromě toho má v zásobě přes 70 příkazů od těch nejjednodušších (Bod[], Usecka[], Delka[]) až po derivování a integrování. GeoGebra se vyznačuje dvojím zobrazováním objektů: výraz v okně **Algebra** odpovídá objektu v **Grafickém okně (nákresně)** a naopak.

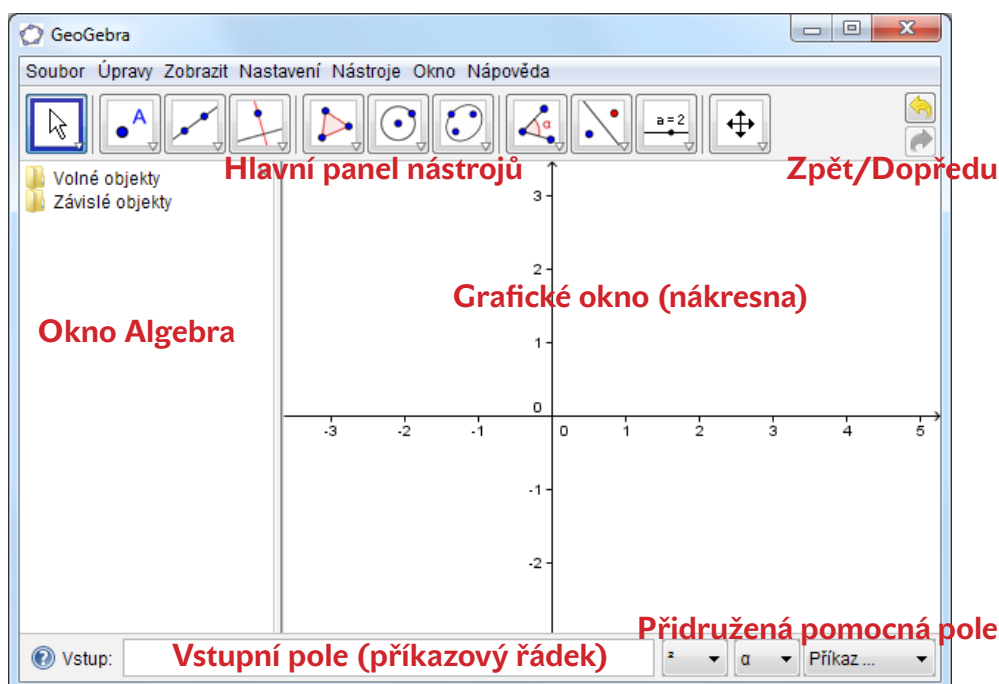
Tato stručná příručka nás seznámí s GeoGebrou ve třech příkladech. Budeme postupovat krok za krokem podle daných pokynů a využijeme několika praktických tipů.

PŘÍKLAD 1: Kružnice opsaná trojúhelníku

PŘÍKLAD 2: Tečny ke kružnici z vnějšího bodu

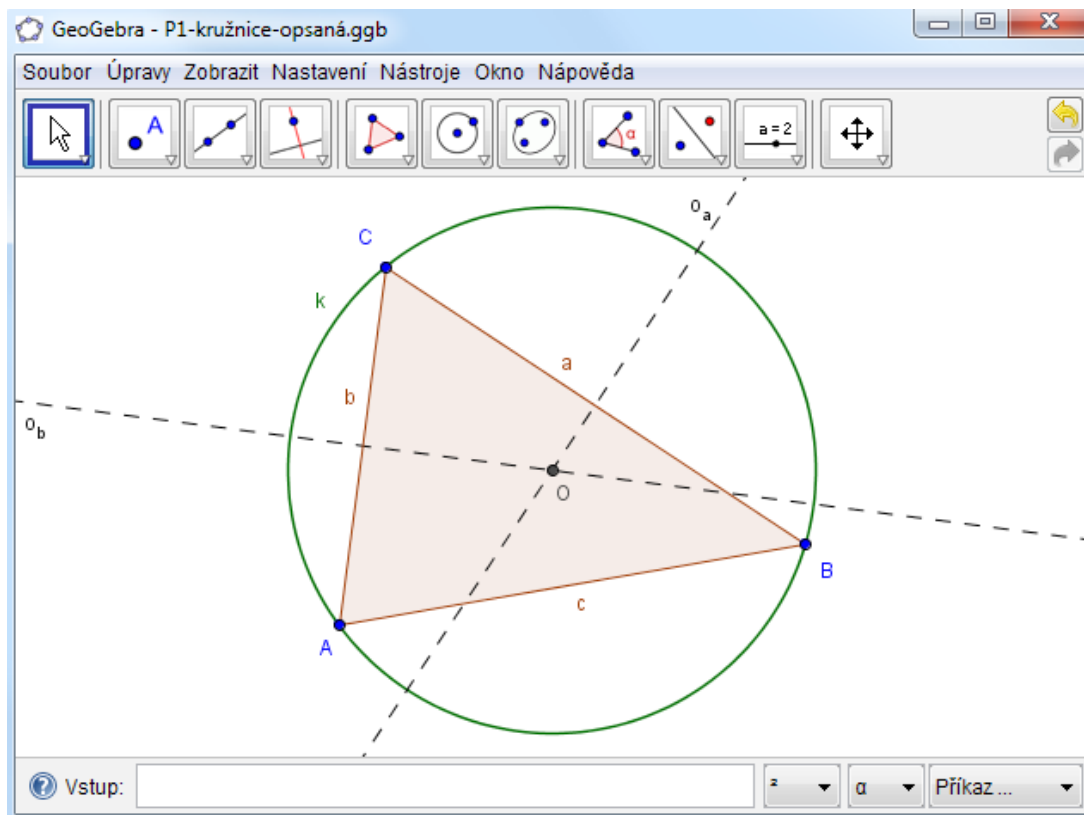
PŘÍKLAD 3: Derivace funkce, tečna grafu funkce

Po startu programu se objeví nové okno GeoGebry (viz obrázek). Pomocí nástrojů v hlavním panelu vytváříme myší konstrukce objektů v **Grafickém okně (nákresně)**. V okně **Algebra** se zároveň objevují souřadnice (rovnice) těchto objektů. **Vstupní pole (příkazový řádek)** slouží pro přímé zadání algebraických výrazů (souřadnic, rovnic, příkazů, funkcí), které se ihned po odeslání klávesou **Enter** objeví v okně **Algebra** a současně v **Grafickém okně**.



PŘÍKLAD 1: Kružnice opsaná trojúhelníku

Úloha: V prostředí GeoGebry vytvořte trojúhelník ABC a sestrojte k němu kružnici opsanou.



Konstrukce pomocí myši



V hlavním panelu nástrojů vybereme nástroj **Mnohoúhelník**. Následně klikneme třikrát na různá místa do náčrtny – vzniknou tak tři vrcholy A, B, C . Trojúhelník dokončíme tím, že klikneme opět do výchozího bodu A .



Vybereme nástroj **Osa úsečky** a klikneme postupně na dvě strany trojúhelníka. Vzniknou tak osy dvou stran (např. a a b) trojúhelníka ABC .



Nástrojem **Průsečíky dvou objektů** klikneme postupně na osu jedné i druhé strany trojúhelníka – dostaneme střed kružnice opsané. Jméno vzniklého bodu změníme na „ O “: klikneme na něm pravým tlačítkem myši a z kontextové nabídky vybereme **Přejmenovat**.
















K dokončení konstrukce zbývá vybrat nástroj **Kružnice daná středem a bodem**. Nejprve klikneme na střed O kružnice opsané a pak na libovolný vrchol trojúhelníka.



Na závěr se přepneme na **Ukazovátko** a přemístíme kterýkoliv z vrcholů trojúhelníka. Dynamicky tak ověříme správnost konstrukce.

Pár tipů






-  Vyzkoušejte tlačítko **Zpět**  a **Dopředu**  v pravém horním rohu GeoGebry.
-  Zobrazení/skrytí některého objektu: klikněte pravým tlačítkem myši a z kontextové nabídky vyberte  **Zobrazit objekt**. Dojde k jeho zobrazení/skrytí.
-  Vlastnosti objektu (barva, styl čar, hodnota, atd.) lze měnit z kontextového menu (pravé tlačítko myši) v nabídce **Vlastnosti** .
-  Pomocí nabídky **Zobrazit** můžete nechat zobrazit/skryt osy, mřížku, algebraické okno, tabulku, vstupní pole, seznam příkazů a další.
-  Posun **Grafického okna** lze provést myší nástrojem **Posunout náčrt** .
-  Nabídka **Zobrazit** > **Zápis konstrukce** představuje tabulku se seznamem všech akcí prováděných během naší práce (konstrukční protokol). Tlačítka se šipkami v dolní části okna si můžete celou konstrukci krok za krokem znovu přehrát.
-  Další informace o konstrukcích myši lze získat v menu **Nápověda** , v oddíle **Geometrické zadání**.

Konstrukce pomocí vstupního pole

Teď provedeme stejnou konstrukci jiným způsobem – využijeme **Vstupní pole** někdy označované jako **Příkazový řádek**. Založíme si novou náčrt (nabídka **Soubor** > **Nový**). Jestliže je **Vstupní pole** vypnuto, je třeba jej nejprve zobrazit (nabídka **Zobrazit** > **Vstupní pole**). Do něj nyní budeme zapisovat následující příkazy, každý z nich postupně odesíláme klávesou **Enter**:

- ▶ $A = (2, 1)$
- ▶ $B = (8, 2)$
- ▶ $C = (3, 5)$
- ▶ `Mnougelnik[A, B, C]`
- ▶ `o_a = OsaUsecky[a]`
- ▶ `o_b = OsaUsecky[b]`
- ▶ `O = Prusecik[o_a, o_b]`
- ▶ `k = Kruznice[O, A]`

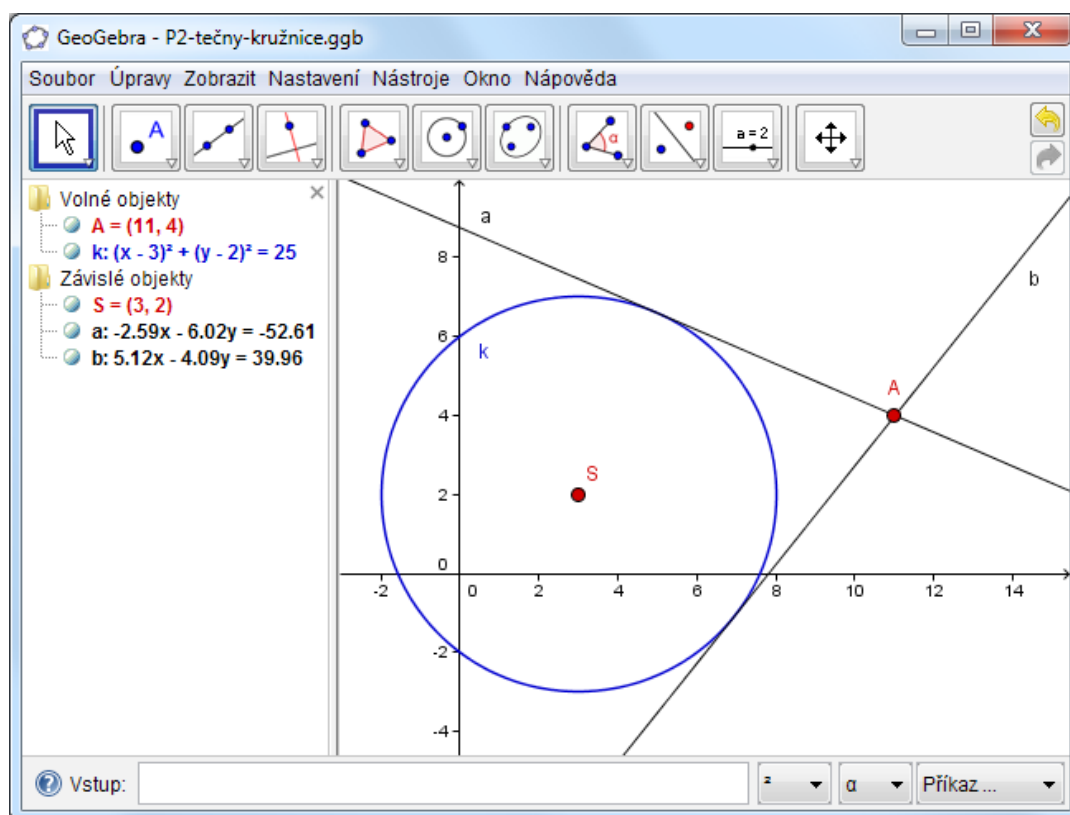
Pár tipů

-  Hranaté závorky `[]` na české klávesnici se dají nejrychleji napsat kombinací kláves **Pravý Alt** + **F** resp. **Pravý Alt** + **G**; příkazy se píšou bez české diakritiky.
-  Automatické dokončování příkazů ve **Vstupním poli**: po zadání prvních dvou písmen příkazu se nabídne návrh, který můžeme buď přijmout **Entrem** nebo pokračovat v zápisu, až se objeví další návrh.
-  Příkaz do **Vstupního pole** není nutné psát ručně, lze jej vybrat z rozbalovacího seznamu vpravo dole (viz úvodní obrázek – **Přidružená pomocná pole**).
-  Další praktické tipy ke **Vstupnímu poli** jsou k dispozici po kliknutí na otazník  v levém dolním rohu okna GeoGebry.

Výstupy z GeoGebry budeme získávat efektivně tehdy, spojíme-li výhody obou způsobů práce s objekty – zápisu do **Vstupního pole** + editace myši v **Grafickém okně**.

PŘÍKLAD 2: Tečny ke kružnici z vnějšího bodu

Úloha: V prostředí GeoGebry vytvořte kružnici $k: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ a sestrojte k ní tečny z bodu $A = [11, 4]$.



Konstrukce pomocí vstupního pole a myši

Zadáme kružnici $k: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ do **Vstupního pole** a potvrdíme.

Poznámka: exponent 2 zadáme buď pomocí rozbalovací nabídky (vpravo od vstupního pole) nebo zápisem 2 .

Do **Vstupního pole** dále zapíšeme příkaz $S = \text{Střed}[k]$ a potvrdíme.

Pomocí **Vstupního pole** definujeme bod A zápisem: $A = (11, 4)$ a potvrdíme.



Vybereme nástroj **Tečny z bodu** a klikneme postupně na bod A a na kružnici k .



Nástrojem **Ukazovátko** budeme posouvat myši bod A , pozorujeme při tom tečny. Myši také přemístíme kružnici k , její rovnici můžeme sledovat v **okně Algebra**.

Pár tipů



Nákresnu lze „zoomovat“ (přibližovat/oddalovat) pomocí kolečka na myši. Návrat do výchozího stavu: Právě tlačítko myši > **Standardní náhled**.



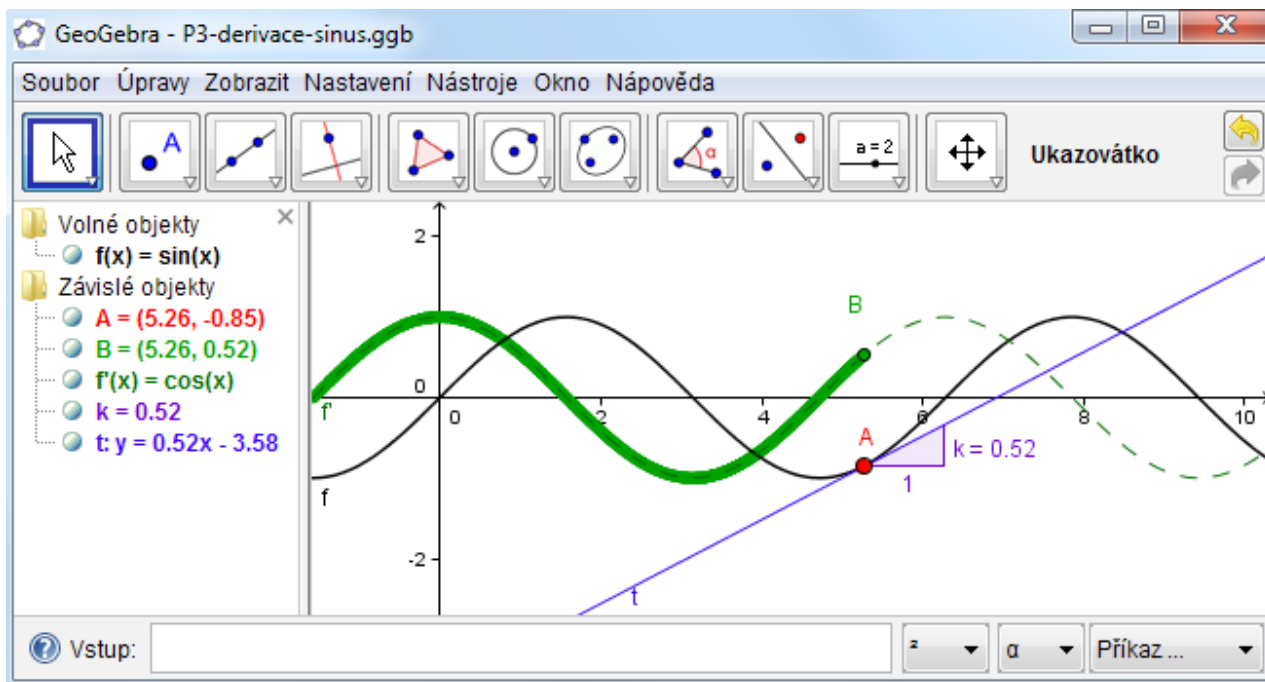
Rovnice kružnice se dá snadno modifikovat přímo v **okně Algebra**: aktivujte **Ukazovátko**  a na rovnici kružnice provedte dvojklik.



Další informace k možnostem **Vstupního pole** naleznete v menu **Nápověda**  v oddíle **Algebraický vstup**.

PŘÍKLAD 3: Derivace funkce, tečna grafu funkce

Úloha: S využitím GeoGebry vytvořte graf funkce $f(x) = \sin x$, určete derivaci funkce a její tečnu v bodě A grafu funkce. Graficky znázorněte směrnicí této tečny.




Varianta 1: Bod na grafu funkce

Do **Vstupního pole** zadáme funkci $f(x) = \sin(x)$ a potvrdíme **Enterem**.




Vybereme nástroj **Nový bod** a klikneme jím na libovolné místo sinusovky. Tím se vytvoří bod A na grafu funkce f .



Aktivujeme nástroj **Tečny z bodu** a klikneme jím nejprve na bod A a potom na graf funkce f . Vzniklou přímkou přejmenujeme na t (nejrychleji: **Ukazovátkem** ) vybereme tečnu, přímo z klávesnice zadáme písmeno „t“ a potvrdíme).

Do **Vstupního pole** zadáme příkaz $k = \text{Smernice}[t]$ a potvrdíme.



Nástrojem **Ukazovátka** uchopíme bod A, budeme jím posouvat po sinusovce a zároveň sledovat tečnu. Dále do **Vstupního pole** napíšeme: $B = (x(A), k)$ a aktivujeme **Stopu** bodu B (na bodě B pravě na myši a volba )



Při dalším posouvání bodu A nyní sledujeme, jak bod B zanechává na nákrese stopu odpovídající grafu derivace funkce f v bodě A (stopa opisující kosinusovku).

Do **Vstupního pole** napíšeme: **Derivace** $[f]$. Vznikne graf derivace – kosinusovka.

Pár tipů



Zadejte jinou funkci do **Vstupního pole**, např. $f(x) = x^3 - 2x^2$. Ihned po odeslání příkazu se zobrazí její derivace a tečna.




Aktivujte **Ukazovátka**  a tažením myši přemísťujte graf funkce. Současně pozorujte odpovídající změny v rovnici funkce a její derivace.

Varianta 2: Bod se souřadnicí $x = a$

Nyní si ukážeme jinou variantu předchozí konstrukce. Nejprve si založíme novou nákrešnu GeoGebry (nabídka **Soubor** > **Nový**). Dále budeme zapisovat následující příkazy do **Vstupního pole**, každý postupně odešleme klávesou **Enter**:


- ▶ $f(x) = \sin(x)$
- ▶ $a = 2$
- ▶ $T = (a, f(a))$
- ▶ $t = \text{Tecna}[a, f]$
- ▶ $k = \text{Smernice}[t]$
- ▶ $B = (x(T), s)$
- ▶ $\text{Derivace}[f]$

Aktivujeme nástroj **Ukazovátko**  a klikneme na číslo a v okně **Algebra**. Jeho hodnotu měníme kurzorovými šipkami. Přitom se bod T a tečna t pohybují podél sinusovky $f(x)$.

Posuvník: Změnu hodnoty čísla a lze také provést posuvníkem: v okně **Algebra** klikneme na číslo a pravým tlačítkem myši a vybereme volbu  **Zobrazit objekt**.

Poznámka: S využitím posuvníku nebo kurzorových šipek lze efektivně zkoumat hodnoty parametrů – např. p, q u kvadratické funkce $y = x^2 + px + q$.





Tečna zadaná jiným způsobem

GeoGebra umí zacházet s vektory i parametrickým zadáním přímek. Proto můžeme vytvořit tečnu i bez předdefinovaného příkazu **Tecna** []. Nejprve tečnu t z předešlé konstrukce smažeme (pravé na myši > volba  **Zrušit**). Pak do **Vstupního pole** napíšeme tyto příkazy:

- ▶ $v = (1, f'(a))$
- ▶ $t: X = T + r \cdot v$

Poznámka: v je směrový vektor tečny t . Místo r (označení parametru) můžeme použít libovolné jiné písmeno.

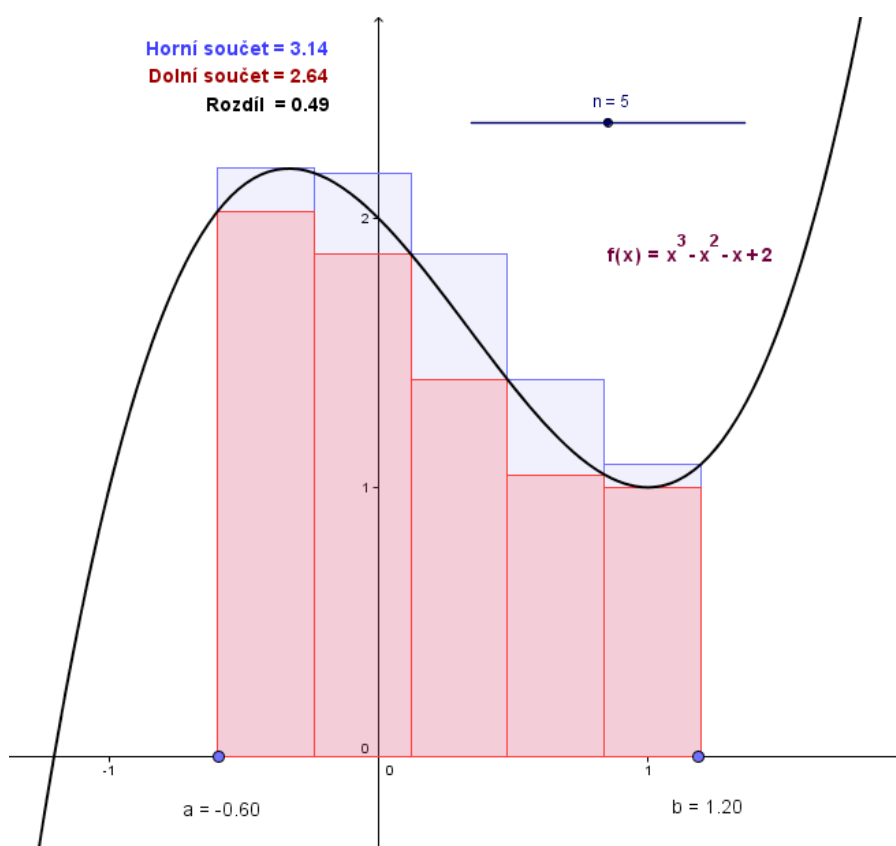
Pár tipů

-  Další možností jak vytvořit tečnu pomocí bodu T a směrového vektoru v je zadání příkazu: **t = Primka** [**T**, **v**].
-  Vyzkoušejte také příkaz: **Inegral** [**f**].
-  Další informace k příkazům GeoGebry naleznete v menu **Nápověda**  v oddíle **Algebraický vstup**. Nápověda je k dispozici také ve formátu PDF na stránkách www.geogebra.org.

Další informace

Doporučujeme navštívit domovskou stránku GeoGebry www.geogebra.org, kde se kromě podrobnějších informací a tipů nachází také aktuální verze programu ke stažení.

GeoGebra například umožňuje snadno exportovat náčrt do dynamických pracovních listů ve formátu **html**, které se zobrazí v jakémkoliv webovém prohlížeči (Firefox, Chrome, Internet Explorer, ...). Na webu GeoGebry jsou rovněž příklady, ukázky a diskusní fóra.



Domovská stránka GeoGebry
Diskusní fórum uživatelů
GeoGebra Wiki – zdroj výukových materiálů

www.geogebra.org
www.geogebra.org/forum
www.geogebra.org/en/wiki

Zpracováno podle manuálu GeoGebra – Quick Start (zdroj: www.geogebra.org, autor: Markus Hohenwarter). Aktuální verze programu – GeoGebra 3.2.46.0 (Java 1.6.0_17, 508MB), leden 2011.

Použité fonty: Andulka Book Pro, ABC Green (zakoupeno u Střešovické písmolijny: www.stormtype.com).

Překlad z angličtiny a němčiny, sazba a grafická úprava: RNDr. Tomáš Mikulěnka.

Materiál byl vypracován v rámci grantového projektu Gymnázia Kroměříž „Beznákladové ICT pro učitele“ spolufinancovaného z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR (www.gymkrom.cz/ict).