VYBRANÉ PARTIE Z MATEMATIKY

Tomáš Mikulenka

březen 2012

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento výukový materiál vznikl jako součást grantového projektu Gymnázia Kroměříž s názvem *Beznákladové ICT pro učitele* realizovaného v letech 2009–2012. Projekt je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.

Obsah

Hodnost matice

Hodnost matice je číslo, které udává maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků (sloupců).

Má-li matice M hodnost h, píšeme $h(M) = h$.

Určování hodnosti matice podle uvedené definice je pracné, proto se používá jiný způsob – ekvivalentních úprav na matici v tzv. *schodovitém tvaru*:

Říkáme, že matice A typu (m, n) má **schodovitý tvar**, právě když každý nenulový řádek matice začíná větším počtem nul než řádek předcházející.

Příklad:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Ekvivalentní úpravy matice – hodnost matice se nezmění těmito úpravami:

1. Záměna pořadí řádků matice.
2. Libovolný řádek matice se vynásobí nenulovým číslem.
3. K libovolnému řádku matice se přičte lineární kombinace jiných řádků.
4. Vynechá se nebo připojí řádek, který je lineární kombinací jiných řádků.

Hodnost matice se nezmění ani analogickými úpravami se sloupci matice.

Příklad 1: Určete hodnost matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 25 \end{pmatrix}$$

Závěr: Hodnost matice $h(A) = 4$ (výsledkem jsou 4 lineárně nezávislé řádky).

Příklad 2: Určete hodnost matice B.

$$\begin{pmatrix} 9 & -14 & 28 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & -14 & 28 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 33 & -39 & -3 \\ 0 & 22 & -26 & -2 \\ 0 & 11 & -13 & -1 \end{pmatrix}$$

Vynecháním 2. i 3. řádku (každý je násobkem 4. řádku) získáme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 11 & -13 & -1 \end{pmatrix}$$

o dvou lineárně nezávislých řádcích. Závěr: Hodnost matice $h(B) = 2$.

Úlohy – hodnost matice

1. Bez výpočtu určete hodnost matic:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Určete hodnost matic:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Určete hodnost matic:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -7 & 8 & 14 \\ 4 & 3 & -2 & -6 \\ -3 & -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Čtvercová matice A_n se nazývá **regulární**, jestliže hodnost $h(A_n) = n$. Není-li čtvercová matice A_n regulární, nazývá se **singulární**. Určete, které z následujících matic jsou regulární a které singulární.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soustavy lineárních rovnic úpravami matic

V soustavě m lineárních rovnic o n neznámých $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

představují a_{ik} KOEFICIENTY a čísla $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ABSOLUTNÍ ČLENY soustavy.

U každé soustavy rozlišujeme dvě matice: MATICI SOUSTAVY A, která je typu $(m,\, n)$, a ROZŠÍŘENOU MATICI SOUSTAVY B, která je typu $(m,\, n+1)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Věta – řešitelnost soustavy lineárních rovnic

1. $h(A) < h(B) \quad \Rightarrow$ soustava nemá řešení.
2. $h(A) = h(B) = n \;\Rightarrow$ soustava má právě jedno řešení.
3. $h(A) = h(B) < n \;\Rightarrow\; \exists\,\infty$ řešení – některé neznámé volíme (parametry).

Příklad 1: Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y - z & = & 1 \\ x + 2y - 3z + 2w & = & 2 \\ 3x + 4y + 2z - 2w & = & 3 \\ -x + y - z + w & = & 4 \end{array}$$

Sestavíme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji do schodovitého tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -1 & 1 & 15 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & 9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 25 & -18 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 25 & -18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 108 \end{array}\right)$$

4. řádek: $w = \frac{108}{27} = 4$; 2. řádek: $y = \frac{1}{3}(6 - 3w + 4z) = 2$;
3. řádek: $z = \frac{1}{25}(3 + 18w) = \frac{75}{25} = 3$; 1. řádek: $x = -(4 - w + z - y) = -1$

Řešení: $\underline{\underline{[x, y, z, w] = [-1, 2, 3, 4]}}$

Úlohy – soustavy rovnic

Řešte následující soustavy lineárních rovnic:

1.
$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ y + z &= 8 \\ z + u &= 12 \\ u + x &= 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 8 - t \\ y &= -4 + t \\ z &= 12 - t \\ u &= t \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x - y &= 6 \\ z - y &= 10 \\ z - u &= 6 \\ u - x &= 4 \end{aligned}$$

nemá řešení

3.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 5 \\ x_4 &= -3 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 5 - 17\alpha + 29\beta \\ x_2 &= -2 + 10\alpha - 17\beta \\ x_3 &= \alpha \\ x_4 &= \beta \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_4 &= 8 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= 10 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

nemá řešení

6.
$$\begin{aligned} p + 2q + 3r &= 14 \\ q + 2r + 3s &= 17 \\ r + 2s + 3t &= 12 \\ s + 2t + 3p &= 8 \\ t + 2p + 3q &= 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} p &= 1 \\ q &= 2 \\ r &= 3 \\ s &= 3 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 - x_3 + x_5 &= 2 \\ 5x_1 + 9x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 4x_1 + 9x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 7 \\ x_4 &= -3 \\ x_5 &= 6 \end{aligned}$$

Determinanty

DETERMINANT je číslo, které lze podle určitých pravidel přiřadit čtvercové matici A řádu n. Formálně jej značíme svislými závorkami:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinant 2. stupně: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$$\text{např.} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 6 = 14 - 24 = -10$$

Determinant 3. stupně:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} + \\ -\ a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \cdot 3 + 9 \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - 9 \cdot (-2) \cdot 3 = 100$$

Determinanty od 4. stupně výše se počítají rozvojem podle prvků některého řádku/sloupce:

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 4 & -6 \\ -4 & 2 & 9 & 3 \\ -1 & -7 & -2 & 9 \\ 5 & 7 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ -7 & -2 & 9 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 9 & 3 \\ -1 & -2 & 9 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+3} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & -7 & 9 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot (-6) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & 9 \\ -1 & -7 & -2 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 648 - 8 \cdot 402 + 4 \cdot 426 + 6 \cdot 146 = 12$$

Úlohy – vypočtěte determinanty:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \qquad |C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Řešení: $|A| = 151$, $|B| = -40$, $|C| = 200$

Využití determinantů – soustavy lineárních rovnic

Cramerovo pravidlo

Nechť A je matice systému n lineárních rovnic o n neznámých:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &=& b_n \end{array} \qquad (1)$$

Nechť A_k je determinant matice, která vznikne z matice A nahrazením k-tého sloupce sloupcem absolutních členů. Pak platí:

1. Systém (1) má právě jedno řešení $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ a $x_k = \dfrac{|A_k|}{|A|}, k = 1, \ldots, n$.
2. Jestliže $|A| = 0$, pak systém (1) má buď ∞ řešení nebo žádné řešení.

Příklady – řešte soustavu rovnic:

1. $$\begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &=& 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 &=& 8 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 &=& 4 \end{array}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix} = -5 \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 8 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \end{vmatrix} = -15$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -20 \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 4 & -3 & 8 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -10$$

Kořeny rovnice: $x_1 = \dfrac{-15}{-5} = 3, \quad x_2 = \dfrac{-20}{-5} = 4, \quad x_3 = \dfrac{-10}{-5} = 2$

2. $$\begin{array}{rcl} 7x_1 - 5x_2 + 2x_3 &=& 41 \\ 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 &=& 20 \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 &=& 9 \end{array}$$

[Řešení: $x_1 = 5,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{1}{2}$]

Kvadratické rovnice a nerovnice

A. V množině R řešte rovnice:

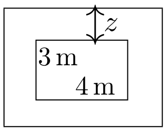
1. $x\,(x-\sqrt{3})-\sqrt{3}\,(x-1)-(5+\sqrt{3})=0$
2. $x^2-\sqrt{2}x+x-\sqrt{2}=0$
3. $\frac{1}{2}(2x-1)^2-[\frac{1}{2}(x+1)]^2=3[(\frac{x}{2})^2-(\frac{1}{2})^2]$
4. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{9}{4x}$
5. $\dfrac{x+\sqrt{2}}{x}-\dfrac{x}{x+\sqrt{2}}=2$
6. $\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{10}{2x+2}=\dfrac{6}{x-2}$
7. $\dfrac{2x-3}{x^3+1}=\dfrac{1}{x^2-x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$

B. V množině R řešte nerovnice:

8. $x^2-2x-15\geq 0$
9. $16x^2+8x+1>0$
10. $(x+16)(x+4)\geq(2x+5)^2$
11. $\dfrac{5}{4}x^2+\dfrac{45}{2}x-50>0$
12. $x+3<-\dfrac{1}{x+1}$
13. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}>1$
14. $2-\dfrac{x-3}{x-2}\geq\dfrac{x-2}{x-1}$

C. Slovní úlohy

15. Ze stanice má být vypraveno 11 vlaků, z nichž každý má po 35 vagónech. Aby se ušetřilo několik lokomotiv, zmenší se počet vlaků tím, že ke každému vlaku bude přidáno tolikrát po pěti vagónech, kolik lokomotiv bude ušetřeno. Tak budou vypraveny všechny vagóny. Kolik lokomotiv bude uvolněno k provedení údržby?
16. Obrázek znázorňuje průřez komínem. Obsah vnitřního obdélníku je pětkrát menší než obsah vnějšího obdélníku. Určete šířku zdiva označenou z.



17. Kupec koupil koně a po nějakém čase ho prodal za 24 pistolí. Přitom ztratil tolik procent, kolik pistolí jej kůň stál. Za kolik pistolí koně koupil? (Bézoutova úloha, 18. století)
18. Určete všechna dvojciferná přirozená čísla, která mají tu vlastnost, že číslice na místě jednotek je o 2 menší než číslice na místě desítek a přitom součin tohoto čísla a součtu jeho číslic je přirozené číslo menší než 1024.
19. Aby byla zajištěna návaznost na několik dalších spojů, je třeba, aby rychlík zvýšil svou průměrnou rychlost o $9\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, neboť tak ujede svou trať 180 km o 40 minut dříve než při původní rychlosti. Za jak dlouho projel rychlík trať původní rychlostí?
20. Třída na brigádě byla rozdělena na dvě skupiny. První skupina nasbírala za den 2604 kg brambor, druhá, v níž bylo o 4 žáky více, 3456 kg. Výkon druhé skupiny byl o 6 kg na žáka větší. Určete počet žáků ve třídě.
21. Po kružnici se v opačných směrech pohybují dvě tělesa: jedno rovnoměrně rychlostí v, druhé rovnoměrně zrychleně se zrychlením a. V okamžiku t_0 se obě tělesa nacházela v témže bodě A a rychlost druhého tělesa byla rovna nule. Za jakou dobu dojde k prvnímu setkání, když ke druhému setkání dojde opět v bodě A?

Řešení: **1.** $\{\sqrt{3}\pm2\sqrt{2}\}$ **2.** $\{-1;\sqrt{2}\}$ **3.** $\{2;\frac{1}{2}\}$ **4.** $\{\pm3\}$ **5.** $\{\pm1\}$ **6.** $\{\frac{1}{5};4\}$ **7.** $\{-\frac{1}{3};2\}$ **8.** $(-\infty,-3)\cup(5,\infty)$ **9.** $\mathbf{R}-\{-\frac{1}{4}\}$ **10.** $\langle-\sqrt{13};\sqrt{13}\rangle$ **11.** $(-\infty,-20)\cup(2,\infty)$ **12.** $(-\infty,-2)\cup(-2,-1)$ **13.** $(-\sqrt{13},-1)\cup(1,\sqrt{3})$ **14.** $(1,\frac{3}{2}\rangle\cup(2,\infty)$ **15.** 4 lokomotivy **16.** 2,13 m **17.** 40 nebo 60 pistolí **18.** 20, 31, 42, 53, 64, 75 **19.** 4 h **20.** 32 žáků (252 neodpovídá reálné situaci) **21.** $(\sqrt{5}-1)\frac{v}{a}$

Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

A. V množině R řešte rovnice:

1. $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=3$
2. $|2x+1|=|x-1|+2$
3. $|x-2|+|x-1|=x-3$
4. $4\left|x+\sqrt{2}\right|-2\left|x-\sqrt{2}\right|=x$
5. $|2x-3|-|x+1|=5\cdot(x-2)$
6. $3|x-1|+2|x-2|=|x+10|$

B. V množině R řešte rovnice:

7. $|x+19|=|x-11|$
8. $2|x-5|=x$
9. $|x-3|=1-x$
10. $|2x+3|=4-x$
11. $2|x^2-1|=|4-x^2|$
12. $|x+3|=2x-7$

C. V množině R řešte nerovnice:

13. $|3x+2|\geq 5$
14. $|2x-4|+|3x+6|-|5x-2|\leq 8-4x$
15. $|x-1|+|2-x|>3+x$
16. $\dfrac{|3-5x|}{x-2}>6$
17. $\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|>3$
18. $\dfrac{9}{|x-5|-3}\geq|x-2|$

D. Řešte v R; x – neznámá, k – parametr:

19. $|x-2|=kx$
20. $|x+3|\leq kx$

E. V množině R řešte rovnice:

21. $x^2+6|x|-7=0$
22. $|x^2+3x|-2=0$
23. $\left|\dfrac{x+3}{x-3}\right|=x+7$
24. $\dfrac{|x|+3}{|x|-3}=3$

F. V množině R řešte nerovnice:

25. $|x^2-6{,}25|\leq 2$
26. $x^2+10>|x^2-16|$
27. $x^2-3|x+1|-x\leq 0$
28. $|x^2+3x+2|<2x+4$

Řešení: **1.** $\langle 3,4\rangle$ **2.** $\left\{-4,\frac{2}{3}\right\}$ **3.** $\emptyset$ **4.** $\left\{-2\sqrt{2},\frac{-2\sqrt{2}}{5}\right\}$ **5.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **6.** $\left\{-\frac{1}{2},4\frac{1}{4}\right\}$ **7.** $\{-4\}$ **8.** $\left\{\frac{10}{3},10\right\}$ **9.** $\emptyset$ **10.** $\left\{-7,\frac{1}{3}\right\}$ **11.** $\left\{\pm\sqrt{2}\right\}$ **12.** $\{10\}$ **13.** $(-\infty,-\frac{7}{3}\rangle\cup\langle -1,\infty)$ **14.** $(-\infty,0\rangle$ **15.** $(-\infty,0)\cup(6,\infty)$ **16.** $(2,9)$ **17.** $\left(\frac{1}{4},1\right)\cup\left(1,\frac{5}{2}\right)$ **18.** $\left\langle -1;2)\cup(8;5+3\sqrt{2}\right\rangle$ **21.** $\{\pm 1\}$ **22.** $\left\{-2,-1,\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$ **23.** $\left\{\frac{-5+\sqrt{97}}{2},\frac{-3\pm\sqrt{105}}{2}\right\}$ **24.** $\{\pm 6\}$ **25.** $\left\langle -\frac{\sqrt{33}}{2},-\frac{\sqrt{17}}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{\sqrt{17}}{2},\frac{\sqrt{33}}{2}\right\rangle$ **26.** $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},\infty\right)$ **27.** $\left\langle 2-\sqrt{7},2+\sqrt{7}\right\rangle$ **28.** $(-2,1)$

Rovnice a nerovnice s neznámou pod odmocninou

A. V množině R řešte rovnice:

1. $\dfrac{5-3\sqrt{x}}{4\sqrt{x}-7}=\dfrac{6\sqrt{x}-11}{15-8\sqrt{x}}$
2. $x+\sqrt{10+x^2}=\dfrac{50}{\sqrt{10+x^2}}$
3. $x+\sqrt{x^2-9}=21$
4. $\sqrt{4x^2-\sqrt{8x+5}}=2x+1$
5. $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$
6. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$
7. $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=4$
8. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+1{,}5=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
9. $\sqrt{x-13}\;+\;\sqrt{x+12}\;=\;1$
10. $\sqrt{x^2+6}\;-\;\sqrt{x^2-6}\;=\;x\cdot\sqrt{2}$

B. Řešte v R pomocí vhodné substituce:

11. $\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}-2=0$
12. $\sqrt{x^2+4x}\;+\;\sqrt{x^2+4x+16}\;=\;\sqrt{2(x^2+4x)+16}$
13. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}\;=7\sqrt{2}\;-\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}$
14. $\sqrt{\dfrac{x^2+8x}{x+1}}+\sqrt{x+7}=\dfrac{7}{\sqrt{x+1}}$

C. V množině R řešte nerovnice:

15. $\sqrt{x}<x$
16. $\sqrt{x^2-6}\;\geq\;5\cdot\sqrt{10}$
17. $2-\sqrt{1-x^2}>\sqrt{4-x^2}$

D. Řešte v R soustavy:

18. $\sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{3}{2}$
    $x+xy+y=9$
19. $\sqrt{\dfrac{y+1}{x-y}}-2\sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}}=3$
    $x+xy+y\;=\;7$
20. $5\sqrt{x+y}-\dfrac{18}{\sqrt{x+y}}\;=\;27$
    $\sqrt{x^2-y^2}-5\sqrt{x+y}\;=\;4$

Řešení: **1.** $\{4\}$ **2.** $\{\frac{4}{3}\sqrt{10}\}$ **3.** $\{\frac{75}{7}\}$ **4.** $\{-\frac{1}{2}\}$ **5.** $\{2\}$ **6.** $\{10\}$ **7.** $\left\{\pm\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$ **8.** $\{\frac{5}{3}\}$ **9.** $\emptyset$ **10.** $\{\sqrt{6}\}$ **11.** $\{-1;1\}$ **12.** $\{-4;0\}$ **13.** $\{15\}$ **14.** $\{1\}$ **15.** $(1,\infty)$ **16.** $(-\infty,16\rangle\cup\langle 16,\infty)$ **17.** $\left\langle -1,-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{15}}{4},1\right\rangle$ **18.** $\{[4;1],\left[-9;-\frac{9}{4}\right]\}$ **19.** $\{[-5;-3],[3;1],[-1+\sqrt{10},-1+\frac{4}{5}\sqrt{10}],[-1-\sqrt{10},-1-\frac{4}{5}\sqrt{10}]\}$ **20.** $\{[26;10]\}$

Rovnice s parametrem

Poznámka: V následujících úlohách představuje x neznámou, další písmena reálné parametry.

A. V množině R řešte rovnice:

1. $(2p-1)\,x-6=p\,x$
2. $\dfrac{kx+1}{x-2}=\dfrac{kx-1}{x+2}$
3. $\dfrac{5x-2}{x-2}=p+4$
4. $\dfrac{p-x}{p-2}-\dfrac{x-2}{p+2}=\dfrac{4p}{p^2-4}$
5. $\dfrac{t}{x+3t}=\dfrac{2}{x+u}$
6. $\dfrac{a(x+2)-3(x-1)}{x+1}=1$

B. V množině R řešte soustavy rovnic:

7. $ax-ay=9$
   $3x-2y=a$

8. $x-4ay=1$
   $2ax-2y=1$

9. $ax+y=a^2$
   $x+ay=a^3$

10. V rovnici $3x^2-9x+c=0$ je jeden kořen 37. Určete parametr c a druhý kořen.

11. V rovnici $3x^2+bx+13=0$ je jeden kořen $\left(-\dfrac{2}{9}\right)$. Určete parametr b a druhý kořen.

12. Je dána kvadratická rovnice $x^2+100x-96=0$. Její různé kořeny označme r, s. Zapište všechny kvadratické rovnice s kořeny R, S, které splňují tuto podmínku:
    a) $R=\dfrac{1}{r},\ S=\dfrac{1}{s}$
    b) $R=3r,\ S=3s$
    c) $R=-r,\ S=-s$

13. Rovnice $x^2-x\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha=0$ má kořeny r, s. Vyjádřete výraz $A=\dfrac{rs}{r^2+rs+s^2}$ pomocí goniometrických funkcí reálného parametru α.

14. Je dána rovnice $2x^2+b\sqrt{3}x+b+2=0$, kde b je reálný parametr, x je neznámá.
    a) Pro která b má rovnice nejvýše jeden kořen?
    b) Pro která b má rovnice dvojnásobný kořen?
    c) Pro která b má rovnice dva kladné kořeny?
    d) Pro která b má rovnice dva záporné kořeny?

Reciproké rovnice

A. V množině C řešte reciproké rovnice sudého stupně:

1. $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 2 = 0$
3. $8x^4 - 54x^3 + 101x^2 - 54x + 8 = 0$
4. $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$
5. $6x^6 + 23x^5 - 2x^4 - 54x^3 - 2x^2 + 23x + 6 = 0$
6. $12x^6 + 28x^5 - 21x^4 - 74x^3 - 21x^2 + 28x + 12 = 0$
7. $2x^8 - 11x^7 + 27x^6 - 43x^5 + 50x^4 - 43x^3 + 27x^2 - 11x + 2 = 0$
8. $5x^6 + 26x^5 + 5x^4 - 5x^2 - 26x - 5 = 0$
9. $20x^6 + 19x^5 - 422x^4 + 422x^2 - 19x - 20 = 0$
10. $2x^8 - 7x^7 + 9x^6 - 7x^5 + 7x^3 - 9x^2 + 7x - 2 = 0$

B. V množině C řešte reciproké rovnice lichého stupně:

11. $4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0$
12. $2x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - x + 2 = 0$
13. $6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0$
14. $8x^5 - 22x^4 - 55x^3 + 55x^2 + 22x - 8 = 0$
15. $10x^7 - 37x^6 - 73x^5 + 46x^4 - 46x^3 + 73x^2 + 37x - 10 = 0$
16. $2x^7 - 9x^6 + 18x^5 - 25x^4 + 25x^3 - 18x^2 + 9x - 2 = 0$

Řešení – část A: **1.** $\left\{-2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 3\right\}$ **2.** $\left\{\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}; \frac{-1\pm\sqrt{15}\,i}{4}\right\}$ **3.** $\left\{\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{4}; 4\right\}$ **4.** $\left\{\pm\sqrt{2}+1; \pm\sqrt{2}-1\right\}$ **5.** $\left\{-3; -\frac{1}{3}; -2; -\frac{1}{2}; 1; 1\right\}$ **6.** $\left\{-1; -1; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; -2; -\frac{1}{2}\right\}$ **7.** $\left\{\pm i;\ 1;\ 1; \frac{1}{2};\ 2;\ \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ **8.** $\left\{\pm 1; \pm i; -\frac{1}{5}; -5\right\}$ **9.** $\left\{\pm 1; -5; -\frac{1}{5}; \frac{1}{4}; 4\right\}$ **10.** $\left\{\pm 1; \frac{1}{2}; 2; \pm i; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
část B: **11.** $\left\{-1; -\frac{1}{2}; -2; \frac{1\pm\sqrt{15}\,i}{4}\right\}$ **12.** $\left\{-1; \frac{1}{2}; 2; \frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right\}$ **13.** $\left\{-1; -\frac{1}{2}; -2; \frac{1}{3}; 3\right\}$ **14.** $\left\{1; -\frac{1}{2}; -2; \frac{1}{4}; 4\right\}$ **15.** $\left\{1; \pm i; -\frac{1}{2}; -2; \frac{1}{5}; 5\right\}$ **16.** $\left\{1; \pm i; \frac{1}{2}; 2; \frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right\}$

Exponenciální rovnice a nerovnice

A. V množině R řešte exponenciální rovnice a nerovnice:

1. $2^{x^2-6x-2{,}5} = 16\cdot\sqrt{2}$
2. $4^{\sqrt{x+1}} = 64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$
3. $\left(1-\frac{5}{9}\right)^{\frac{2}{3-2x}} = 2{,}25^{\frac{3}{x-5}}$
4. $3^{4\sqrt{x}} - 4\cdot 3^{2\sqrt{x}} = -3$
5. $3^3\cdot 27^{2x-3} \leq 81^{3x-5}$
6. $0{,}25^{2-x} \geq 256\cdot 2^{-x-3}$
7. $(0{,}75)^{x-1}\cdot\sqrt[x]{\frac{4}{3}} < \frac{9}{16}$

B. V množině Q řešte exponenciální rovnice:

8. $\left(\frac{9}{25}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{125}{27}\right)^{x-1} = \frac{\log 8}{\log 32}$
9. $\frac{2^{x+3}\cdot 3^{x+2}}{6^{7-x}\cdot 8^{x-1}} = \frac{9^{x-2}}{3}$
10. $9^x - 2^{x+0{,}5} = 2^{x+3{,}5} - 3^{2x-1}$
11. $3\cdot 4^x + 9^x\cdot 3^3 = 6\cdot 4^{x+1} - 0{,}5\cdot 9^{x+1}$
12. $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$
13. $\sqrt[2x+4]{4^{8+x}} = \sqrt[6]{128}$
14. $\sqrt[3x-7]{8^{x-3}} = \sqrt[x-1]{\sqrt[3]{2^{3x-1}}}$

C. Řešte soustavy exponenciálních rovnic:

15. $8^{2x+1} = 32\cdot 2^{4y-1}$
    $5\cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}$
16. $64^{2x} + 64^{2y} = 12$
    $64^{x+y} - 4\cdot\sqrt{2} = 0$
17. $\sqrt[x-y]{x+y} = 2\cdot\sqrt{3}$
    $(x+y)\cdot 2^{y-x} = 3$
18. $\sqrt[y]{4^x} = 32\cdot\sqrt[x]{8^y}$
    $\sqrt[y]{3^x} = 3\cdot\sqrt[y]{9^{1-y}}$

Řešení

1. $\{-1,7\}$ **2.** $\{35\}$ **3.** $\{-0{,}25\}$ **4.** $\left\{0;\frac{1}{4}\right\}$ **5.** $\left\langle\frac{7}{3},\infty\right)$ **6.** $\langle 3,\infty)$ **7.** $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2},0\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2},\infty\right)$ **8.** $\{-2\}$ **9.** $\{-1\}$ **10.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **11.** $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **12.** $\{3\}$ **13.** $\{34\}$ **14.** $\left\{\frac{5}{3}\right\}$ **15.** $\left[\frac{3}{14},\frac{1}{14}\right]$ **16.** $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right],\left[\frac{1}{6},\frac{1}{4}\right]$ **17.** $[7;5]$ **18.** $[-2;4],\left[\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$

Logaritmické rovnice a nerovnice

A. V množině R řešte logaritmické rovnice a nerovnice:

1. $\log(x+3) - \log(x-3) = \log(x+9)$
2. $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$
3. $\log_4 x + \log_4^{-1} x = 2$
4. $(2x+1)^{\log(2x+1)-3} \leq 0{,}01$
5. $\log(x^2+7) \leq 2\log(x+7)$
6. $0{,}5 \cdot \log(2x+10) \geq \log(x+1)$
7. $2 \cdot \log(x-1) < 0{,}5(\log x^5 - \log x)$

B. V množině R řešte logaritmické rovnice:

8. $1 + \log_7 x^3 = 10 \cdot (\log_7 x)^{-1}$
9. $x^{3+2\log x} = 100 \cdot x^{2+\log x}$
10. $\log_x a + \log_{xa^{\frac{1}{4}}}(x^2 \cdot \sqrt{a}) = 4$
11. $\dfrac{1}{5-\log_2 x} + \dfrac{2}{1+\log_2 x} = 1$
12. $\log_2(9^{x-1}+7) = 2 + \log_2(3^{x-1}+1)$
13. $\dfrac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log\sqrt[3]{x-40}} = 3$

C. Řešte soustavy logaritmických rovnic:

14. $\log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7$, $\quad x^y = 5^{12}$
15. $\log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1$, $\quad x^2 - y^2 = 2$
16. $3^x \cdot 2^y = 576$, $\quad \log_2(y-x) = 2$
17. $2 \cdot \log_x 2 + 3 \cdot \log_y 2 = 0$, $\quad x^3 - 4y^2 = 0$

D. Upravte výrazy obsahující logaritmy:

18. Dokažte, že platí: $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$
19. Zjednodušte výraz $a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}}$
20. Dokažte, že za předpokladů $a^2+b^2=c^2, a>0, b>0, c>0, c-b\neq 1, c+b\neq 1$ platí:
$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \cdot \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$

Řešení

1. $\left\{\frac{-5+\sqrt{145}}{2}\right\}$ **2.** $\{100; 0{,}01\}$ **3.** $\{4\}$ **4.** $\{49{,}5\}$ **5.** $(-3,\infty)$ **6.** $(-1,3\rangle$ **7.** $(1,\infty)$ **8.** $\left\{\frac{1}{49}, \sqrt[3]{7^5}\right\}$ **9.** $\{10; 0{,}01\}$ **10.** $\{\sqrt{a}\}$ **11.** $\{4; 8\}$ **12.** $\{1; 2\}$ **13.** $\{48\}$ **14.** $[625; 3], [125; 4]$ **15.** $\left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ **16.** $[2; 6]$ **17.** $\left[\sqrt[3]{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ **18.** obě strany lze upravit na $\log_a ab$ **19.** $\log_b a$

Limita funkce

Říkáme, že funkce $y = f(x)$ má v bodě $a \in R$ (v němž nemusí být definována) limitu $L \in R$, právě když ke každému kladnému číslu ε existuje takové kladné číslo δ, že pro všechna x z δ-okolí bodu a leží funkční hodnoty $f(x)$ v ε-okolí bodu L.
Zápis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ čteme: „limita *f(x)* pro x jdoucí k a je rovna L“.

Poznámka: δ-okolí bodu a je otevřený interval $(a-\delta, a+\delta)$ neboli množina všech $x \in R$, pro která platí: $x \in (a-\delta, a+\delta)$ resp. $|x-a| < \delta$.

Limita funkce ve vlastním bodě

Při výpočtu následujících limit upravíme lomený výraz vhodným rozšířením nebo krácením:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2+x-2}{x\,(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^4-1}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$

5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3\sqrt{x-2}-2\sqrt{x+0{,}5}}{x^2-16}$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$

7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}$

8. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{\sqrt{x^2-16}+x+2}$

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a\sqrt{ax}}{\sqrt{ax}-a}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^4-(1+4x)^3}{x^2}$

Výsledky **1.** $\frac{15}{2}$ **2.** -12 **3.** $\frac{1}{2}$ **4.** $\frac{1}{2}$ **5.** $\frac{5\sqrt{2}}{96}$ **6.** $\frac{1}{4}$ **7.** $\frac{1}{12}$ **8.** 9 **9.** $3a$ **10.** 6

Výpočet limity funkce s využitím substituce

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \left|\begin{array}{c} x=t^6 \\ x\to 1 \\ t\to 1 \end{array}\right| = \lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[3]{t^6}-1}{\sqrt{t^6}-1} = \lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1} = \lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$
$$= \lim_{t\to 1}\frac{(t+1)}{(t^2+t+1)} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

Limita funkce v nevlastním bodě

Při výpočtu těchto limit dělíme před provedením limitního procesu čitatele i jmenovatele lomené funkce nejvyšší mocninou proměnné x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-3}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+3} = \frac{0+0-3}{0+0+3} = -1$$

U funkcí se součtem (rozdílem) odmocnin nejprve výraz vhodně upravíme:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)\cdot\frac{\sqrt{x^4+1}+x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1-x^4}{\sqrt{x^4+1}+x^2} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+1}+x^2}\cdot\frac{x^{-2}}{x^{-2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}+1} = \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = 0$$

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$

14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$

17. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

18. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$

19. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

20. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$

21. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$

22. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\right)$

Výsledky **11.** $\frac{m}{3}$; subst.: $1+mx=t^3$ **12.** 2; subst.: $1+2x=t^4$ **13.** 0 **14.** $\frac{1}{2}$ **15.** 0 **16.** $\frac{1}{4}$ **17.** $\frac{3}{2}$ **18.** 0 **19.** $\frac{1}{2}$ **20.** 1 **21.** $\frac{a+b}{2}$ **22.** 0

Užití limit – výpočet asymptot

Asymptota bez směrnice

Jestliže $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, pak přímka $x = a$ je její **asymptotou bez směrnice**. Tyto přímky jsou rovnoběžné s osou y a procházejí takovými body, v nichž funkce není definována.

Asymptota se směrnicí

Přímka $y = k\,x + q$ je **asymptotou se směrnicí** grafu funkce $y = f(x)$, právě když existují limity

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - k\,x] \quad \text{resp.} \quad k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k\,x]$$

Příklad

Určete asymptoty ke grafu funkce $y = \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$.

a) $D(f) = \mathsf{R}-\{1\} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2 - x}{x+1} = \dfrac{2}{0} = \infty$

Asymptotou bez směrnice je přímka $x = -1$.

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x}{x\,(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1 = k$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2 - x}{x+1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{1 + \frac{1}{x}} = -2 = q$$

Asymptotou se směrnicí je přímka $y = x - 2$.

Úlohy – určete asymptoty ke grafům následujících funkcí:

1. $y = x + \dfrac{2\,x}{x^2 - 1}$

2. $y = \dfrac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}$

3. $y = \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^2$

4. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

Výsledky **1.** $x = -1,\; x = 1,\; y = x$ **2.** $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\; x = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\; y = \dfrac{1}{2}$ **3.** $x = 0,\; y = 1$
4. $x = -1,\; x = 1,\; y = -x$

Derivování základních elementárních funkcí

Určete první derivaci explicitně zadaných funkcí

1. $y = \dfrac{5}{7}x^7 - \dfrac{4}{5}x^5 + \dfrac{2}{3}x^3 - 5x - 2$

2. $y = \dfrac{20}{7}\, x^{0{,}84}$

3. $y = \left(\sqrt{2} - 1\right)\, x^{\sqrt{2}+1}$

4. $y = \dfrac{8}{13}\, x^3 \cdot \sqrt[4]{x}$

5. $y = 12\, \sqrt[3]{x}\ \sqrt[4]{x^3}\ \sqrt[6]{x^5}$

6. $y = \sqrt[4]{x\, \sqrt[3]{x\, \sqrt{x}}}$

7. $y = 3x^3 - \dfrac{5}{3x^2} + 7 - 4\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}$

8. $y = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{3x^3}$

9. $y = \dfrac{8}{\sqrt[4]{x}} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$

10. $y = \dfrac{2x}{1 - x^2}$

11. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$

12. $y = \dfrac{x}{(1-x)^2 \cdot (1+x)^3}$

13. $y = (5x^2 - 2)^{10}$

14. $y = \left(7x^2 - \dfrac{4}{x} + 6\right)^6$

15. $y = \dfrac{-5}{33} \cdot \sqrt[5]{(8-3x)^{11}}$

16. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$

17. $y = x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

18. $y = x^2 \cdot \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

Geometrické úlohy

19. Pod jakým úhlem se protíná parabola $y = x^2$ s přímkou $3x - y - 2 = 0$?

20. Ve kterém bodě je tečna paraboly $y = x^2$ a) rovnoběžná s přímkou $y = 4x - 5$; b) kolmá k přímce $2x - 6y + 5 = 0$; c) svírá s přímkou $3x - y + 1 = 0$ úhel 45°?

Výsledky

1. $5x^6 - 4x^4 + 2x^2 - 5$ **2.** $2{,}4 \cdot x^{-0{,}16}$ **3.** $x^{\sqrt{2}}$ **4.** $2\, x^2 \sqrt[4]{x}$ **5.** $23\, \sqrt[12]{x^{11}}$ **6.** $\frac{3}{8\sqrt[8]{x^5}}$ **7.** $9x^2 - \frac{10}{3x^3} - \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{8x\sqrt[4]{x}}$ **8.** $\frac{1-x}{x^4}$ **9.** $\frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$ **10.** $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ **11.** $\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$ **12.** $\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3\,(1+x)^4}$ **13.** $100x\,(5x^2-2)^9$ **14.** $\frac{12(7x^3+2)(7x^3+6x-4)^5}{x^7}$ **15.** $\sqrt[5]{(8-3x)^6}$ **16.** $\frac{2x^3(2x^4+1)}{\sqrt{(1-x^4-x^8)^3}}$ **17.** $\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$ **18.** $\frac{x\cdot(8+9\sqrt{x})}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ **19.** $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} = 8°7'48''$; $\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{13} = 4°23'55''$ **20.** a) $[2;4]$ b) $\left[-\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right]$ c) $[-1;1]$, $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{16}\right]$

Derivace goniometrických funkcí

Příklad – derivujte následující funkce: A) $y = \sqrt{4x + \sin 4x}$

B) $y = \operatorname{tg} x + \dfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$

A) $$y' = \frac{4 + 4\cdot\cos 4x}{2\sqrt{4x+\sin 4x}} = \frac{2\cdot(1+\cos 4x)}{\sqrt{4x+\sin 4x}} = \left|\begin{array}{c} 1 = \sin^2 2x + \cos^2 2x \\ \cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2\,(\sin^2 2x + \cos^2 2x + \cos^2 2x - \sin^2 2x)}{\sqrt{4x+\sin 4x}} = \frac{4\,\cos^2 2x}{\sqrt{4x+\sin 4x}}$$

B) $$y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{3}\cdot 3\,\operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{5}\cdot 5\,\operatorname{tg}^4 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1 + 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2}{\cos^2 x} = \left| 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\right| = \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^6 x} = \sec^6 x$$

Úlohy – určete první derivace těchto funkcí:

1. $y = \sin^2 x^3$

2. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

3. $r = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)$

4. $y = 3\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^3 x$

5. $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$

6. $y = \sqrt{2x \;- \sin 2x}$

7. $y = \dfrac{\sin x - x\,\cos x}{\cos x + x\,\sin x}$

8. $y = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^{10}$

9. $y = 2\,\sin^3\sqrt{\dfrac{3}{x}}$

10. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{2\cdot\sin 2x}$

Výsledky

1. $3x^2\,\sin 2x^3$ **2.** $-\sin 4x$ **3.** $\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi$ **4.** $-3\,\sin^{-4} x$ **5.** $\frac{1}{\cos x - 1}$ **6.** $\frac{2\cdot\sin^2 x}{\sqrt{2x - \sin 2x}}$
7. $\frac{x^2}{(\cos x + x\,\sin x)^2}$ **8.** $\frac{20\cdot\sin x}{\cos^{21} x}$ **9.** $-3\sqrt{\frac{3}{x}}\cdot\sin^2\sqrt{\frac{3}{x}}\cdot\cos\sqrt{\frac{3}{x}}$ **10.** $\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 2x}$

Derivace exponenciálních a logaritmických funkcí

Příklad – derivujte následující funkce:

A) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

B) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$

A) $$y' = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} =$$
$$= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x} - (e^{2x}-2+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$$

B) $$y' = \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} \cdot \frac{2\cdot(1-2x) - (1+2x)(-2)}{(1-2x)^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2x}{1+2x} \cdot \frac{2\cdot(1-2x+1+2x)}{(1-2x)^2} = \frac{1-2x}{1+2x} \cdot \frac{2}{(1-2x)^2} = \frac{2}{1-4x^2}$$

Úlohy – určete první derivace těchto funkcí:

1. $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

2. $y = \dfrac{1-10^x}{1+10^x}$

3. $y = e^{\frac{x}{\ln x}}$

4. $y = x \cdot 10^{-x}$

5. $y = \dfrac{\cos x}{e^x}$

6. $y = (e^{ax} - e^{-ax})^2$

7. $y = \log^3 x^2$

8. $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$

9. $y = 2\sqrt{x} - 4\cdot\ln(2+\sqrt{x})$

10. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right)$

11. $y = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$

12. $y = \ln\dfrac{e^x}{x^2+1}$

Výsledky

1. $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$ **2.** $\frac{-2\cdot 10^x\cdot\ln 10}{(1+10^x)^2}$ **3.** $e^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$ **4.** $10^{-x}(1 - x\cdot\ln 10)$ **5.** $-e^{-x}(\sin x + \cos x)$
6. $2a(e^{2ax} - e^{-2ax})$ **7.** $\frac{6\cdot\log^2 x^2}{x\cdot\ln 10}$ **8.** $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$ **9.** $\frac{1}{2+\sqrt{x}}$ **10.** $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ **11.** $\frac{-2}{x\,(1+\ln x)^2}$ **12.** $\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

Derivace cyklometrických funkcí

Příklad – derivujte následující funkce: A) $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$

B) $y = \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{1+\sin x}$

A) $$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-(1-2x^2+x^4)}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2}{1+x^2}$$

B) $$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)^2} \cdot \frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2} = \frac{(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)^2+\cos^2 x} \cdot$$

$$\cdot \frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-(\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x)}{1+2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{-(\sin x+1)}{2\,(1+\sin x)} = -\frac{1}{2}$$

Úlohy – určete první derivace těchto funkcí:

1. $y = x \cdot \arcsin(\ln x)$
2. $y = x^3 \cdot \operatorname{arctg} x^3$
3. $y = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
4. $y = \operatorname{arccotg}\left(\ln \frac{1}{x}\right)$
5. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $y = \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \frac{2}{x}$
7. $y = \arccos \sqrt{1-2x} + \sqrt{2x-4x^2}$
8. $y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$
9. $y = \arccos \frac{3x-1}{4}$
10. $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}} + \arcsin e^x$

Výsledky

1. $\arcsin(\ln x) + \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$ **2.** $3x^2 \operatorname{arctg} x^3 + \frac{3x^5}{1+x^6}$ **3.** $\arcsin x$ **4.** $\frac{1}{x\,(1+\ln^2\frac{1}{x})}$ **5.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $\frac{1}{x^2+4}$ **7.** $\sqrt{\frac{2}{x}-4}$ **8.** $\frac{-1}{1+x^2}$ **9.** $\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5+2x-3x^2}}$ **10.** $2e^x\cdot\sqrt{1-e^{2x}}$

Derivace hyperbolických funkcí

$f(x)$	$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\operatorname{tgh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\operatorname{cotgh} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
$f'(x)$	$(\sinh x)' = \cosh x$	$(\cosh x)' = \sinh x$	$(\operatorname{tgh} x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$(\operatorname{cotgh} x)' = \dfrac{-1}{\sinh^2 x}$
vztahy	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$	$\sinh 2x = 2 \cdot \sinh x \cdot \cosh x$	

Příklad – derivujte následující funkce: A) $y = 2 \cdot \sqrt{\cosh x - 1}$

B) $y = \operatorname{tgh} x + \operatorname{cotgh} x$

A) $$y' = \frac{2 \cdot \sinh x}{2 \cdot \sqrt{\cosh x - 1}} = \sqrt{\frac{\sinh^2 x}{\cosh x - 1}} = \sqrt{\frac{\cosh^2 x - 1^2}{\cosh x - 1}} = \sqrt{\cosh x + 1}$$

B) $$y' = \frac{1}{\cosh^2 x} - \frac{1}{\sinh^2 x} = \frac{-\cosh^2 x + \sinh^2 x}{\cosh^2 x \cdot \sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x \cdot \cosh^2 x} =$$
$$= \frac{-4}{4 \cdot \sinh^2 x \cdot \cosh^2 x} = \frac{-4}{(2 \cdot \sinh x \cdot \cosh x)^2} = \frac{-4}{\sinh^2 2x}$$

Úlohy – určete první derivace těchto funkcí:

1. $y = x \cdot \sinh x - \cosh x$
2. $y = \sinh^2 x + \cosh^2 x$
3. $y = \sqrt{1 + \sinh^2 4x}$
4. $y = x - \operatorname{cotgh} x$
5. $y = \arcsin(\operatorname{tgh} x)$
6. $y = \ln(\cosh x) + \dfrac{1}{2 \cdot \cosh^2 x}$
7. $y = \dfrac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \ln\left(\operatorname{cotgh} \dfrac{x}{2}\right)$
8. $y = \sqrt[4]{\dfrac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh} x}}$

Výsledky **1.** $x \cdot \cosh x$ **2.** $2 \sinh 2x$ **3.** $4 \cdot \sinh 4x$ **4.** $\operatorname{cotgh}^2 x$ **5.** $\frac{1}{\cosh x}$ **6.** $\operatorname{tgh}^3 x$ **7.** $\frac{-2}{\sinh^3 x}$ **8.** $\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\cosh x - \sinh x}}$

Logaritmické derivování

Funkce tvořené výrazem, který lze logaritmovat, můžeme derivovat metodou tzv. **logaritmické derivace**. Podstatou této metody je derivace *složené logaritmické funkce*:

$$[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]'$$

Kromě funkcí ve tvaru součinu a podílu mocnin funkcí derivujeme metodou logaritmické derivace funkce ve tvaru $y = [u(x)]^{v(x)}$ (stručně $y = u^v$) takto:

$$\begin{aligned} y &= u^v \\ \ln y &= v \cdot \ln u \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= [v \cdot \ln u]' \\ y' &= [v \cdot \ln u]' \cdot y \end{aligned}$$

Příklad Derivujte:

$$\begin{aligned} y &= (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos x}} \\ \ln y &= \frac{1}{\cos x} \cdot \ln \operatorname{tg} x \\ \frac{y'}{y} &= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^3 x \cdot \operatorname{tg} x} \\ \frac{y'}{y} &= \frac{\sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{\sin x}}{\cos^2 x} \\ \frac{y'}{y} &= \frac{\sin^2 x \cdot \ln \operatorname{tg} x + 1}{\sin x \cdot \cos^2 x} \\ y &= \frac{\sin^2 x \cdot \ln \operatorname{tg} x + 1}{\sin x \cdot \cos^2 x} \cdot (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos x}} \end{aligned}$$

Úlohy Derivujte následující funkce:

1. $y = x^{\sin x}$ **2.** $y = x^{e^x}$

3. $y = 9x^{-3x}$ **4.** $y = 2x^{\sqrt{x}}$

5. $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$, $a \neq 0$

6. $y = (\sin x)^{\cos x}$

7. $y = \sqrt[3]{\frac{x\,(x^2+1)}{x^2-1}}$

8. $y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{3+x^3}$

9. $y = \frac{(3-x)^4\sqrt{x+2}}{(x+1)^5}$

Výsledky

1. $(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})\, x^{\sin x}$ **2.** $x^{e^x}\, e^x\, (\ln x + \frac{1}{x})$ **3.** $-27x^{-3x}(1+\ln x)$ **4.** $\sqrt{x} \cdot x^{\sqrt{x}-1} \cdot (\ln x + 2)$ **5.** $(\frac{a}{x})^x\, (\ln \frac{a}{x} - 1)$ **6.** $(\cos^2 x - \sin^2 x\, \ln \sin x)(\sin x)^{\cos x - 1}$ **7.** $\frac{x^4-4x^2-1}{3x\,(x^4-1)}\sqrt[3]{\frac{x\,(x^2+1)}{x^2-1}}$ **8.** $\frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$ **9.** $\frac{(x^2-32x-73)(3-x)^3}{2\,(x+1)^6\sqrt{x+2}}$

Průběh funkce

1. Určete průběh funkce $f(x) = \dfrac{x^3}{2\,(x+1)^2}$

Postup

1. Definiční obor funkce: $D(f) = \mathsf{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, -\infty)$

2. Sudost – lichost, perioda: $f(x) \neq f(-x)$ a $f(-x) \neq -f(x)$ … f-ce není S ani L

3. Nulové body: z rovnice $f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ jediný nulový bod: $x = 0$

4. První derivace $f'(x)$: $f'(x) = \left(\dfrac{x^3}{2\,(x+1)^2}\right)' = \ldots\ldots = \dfrac{x^2\,(x+3)}{2\,(x+1)^3}\ , \ x \neq -1$

5. Stacionární body: řešením rovnice $f'(x) = 0$ obdržíme stacionární body: $x_1 = -3,\ x_2 = 0$

6. Druhá derivace $f''(x)$: $f''(x) = \left(\dfrac{x^2\,(x+3)}{2\,(x+1)^3}\right)' = \ldots\ldots = \dfrac{3x}{(x+1)^4}\ , \ x \neq -1$

dosazením stacionárních bodů do $f''(x)$ určíme extrémy:
$f''(-3) = -\frac{9}{16} < 0$ … lokální maximum
$f''(0) = 0$ ………… inflexní bod

7. Asymptoty: a) bez směrnice: $x = -1$ …… $f(-1)$ nedefinována

b) se směrnicí: $y = kx + q$

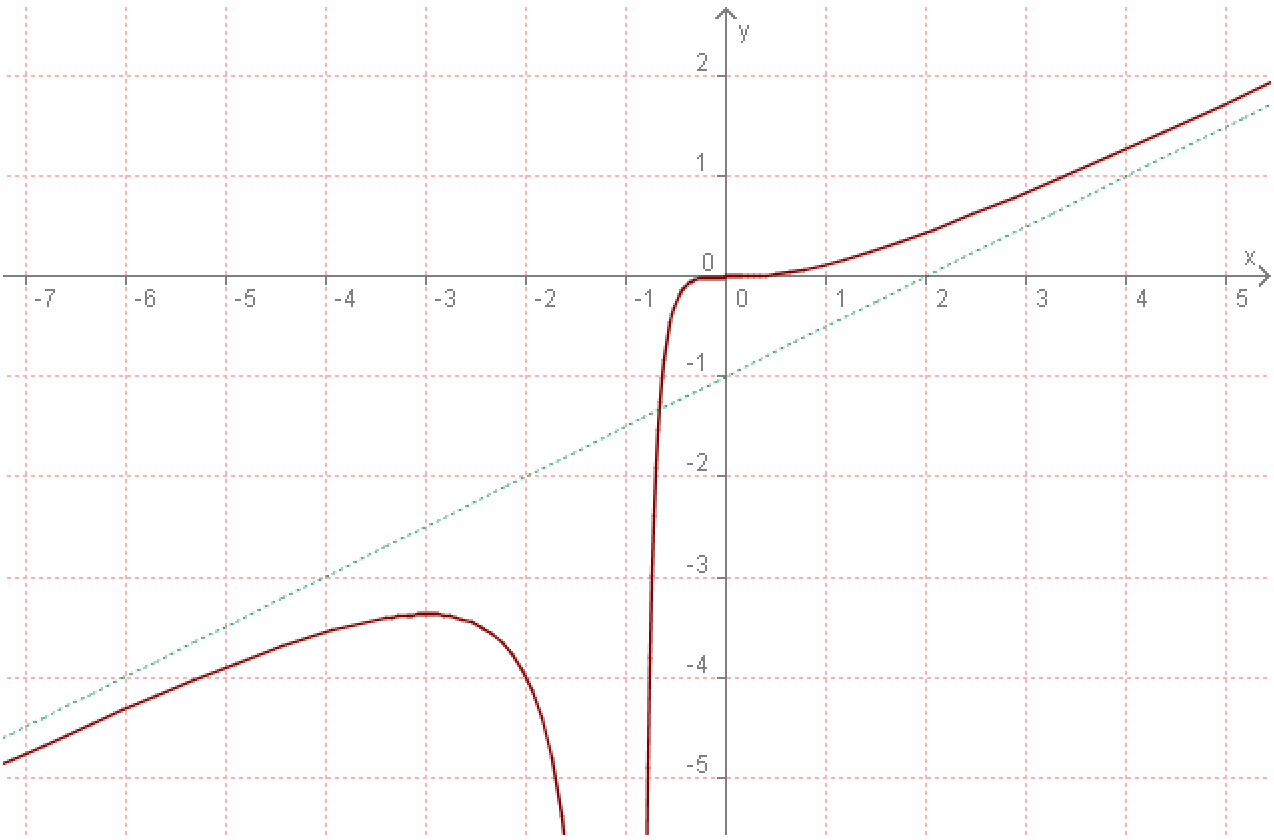
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x\,(x+1)^2} = \ldots = \frac{1}{2}$$

$$q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{2\,(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right] = -1$$

asymptota se směrnicí: $y = \dfrac{x}{2} - 1$

8. Souhrnná tabulka:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	nedef.	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-\dfrac{9}{16}$	$-$	nedef.	$-$	0	$+$
$f(x)$ monotónnost	$\nearrow$	$-\dfrac{27}{8}$	$\searrow$	nedef.	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$f(x)$ průběh	$\frown$	max.	$\frown$	asympt. $x=-1$	$\frown$	inflexní bod	$\smile$



Graf funkce $\quad f(x)=\dfrac{x^3}{2\,(x+1)^2}$

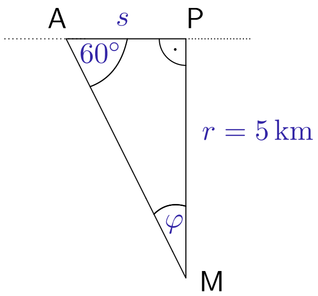
Využití derivací ve fyzice

Příklad 1 – výpočet okamžité rychlosti

Maják je vzdálen od břehu 5 km a jeho reflektor se za každou minutu otočí ve vodorovné rovině o 360°. Vypočtěte rychlost světelné stopy pohybující se po břehu v okamžiku, kdy světelný paprsek svírá s pobřežím úhel 60°. Předpokládáme, že břeh je přímočarý.

Řešení

$f = 1\,\text{min}^{-1} = \dfrac{1}{60}\,\text{s}^{-1}$
$\alpha = 60°$
$r = 5\,\text{km} = 5000\,\text{m}$
$v_s = ?\ \text{m·s}^{-1}$



Bod M na obrázku představuje maják; předpokládejme, že světelná stopa se pohybuje na břehu od bodu P k bodu A. Z pravoúhlého trojúhelníka MPA je dráha s uražená světelnou stopou:

$$s = r \cdot \operatorname{tg} \varphi = r \cdot \operatorname{tg} \omega t = r \cdot \operatorname{tg} 2\pi f t \tag{1}$$

Okamžitou rychlost v_s světelné stopy určíme jako 1. derivaci dráhy s podle času t:

$$v_s = \dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r \cdot \operatorname{tg} \omega t) = \frac{\omega \cdot r}{\cos^2 \omega t} \tag{2}$$

kde $\omega \cdot r = 2\pi f \cdot r$ a v okamžiku, kdy světelný paprsek svírá s pobřežím úhel 60°, je úhel $\omega t = \varphi = 90° - 60° = 30°$. Po dosazení uvedených hodnot do (2) je

$$v_s = \frac{2\pi \cdot \frac{1}{60} \cdot 5000}{\cos^2 30°} = 698{,}1\ \text{m·s}^{-1} \doteq 2\,513\ \text{km·h}^{-1}.$$

Závěr

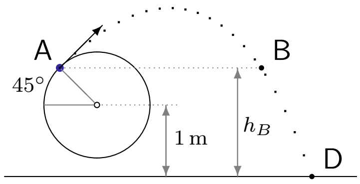
Rychlost světelné stopy pohybující se v daném okamžiku po břehu je $698{,}1\ \text{m·s}^{-1}$.

Příklad 2 – výpočet okamžité rychlosti

Během otáčení s frekvencí 80 otáček za minutu se rozpadlo kolo setrvačníku. Jeho poloměr je 90 cm a střed se nachází 1 m nad zemí. Jakou rychlost bude mít úlomek označený na obrázku písmenem A při dopadu na zem?

Řešení

$f = 80\,\mathrm{min}^{-1} = \dfrac{4}{3}\ \mathrm{s}^{-1}$
$r = 90\,\mathrm{cm} = 0{,}9\,\mathrm{m}$
$\varphi = 45°, \quad h_1 = 1\,\mathrm{m}$
$v_D = ?\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$



Velikost okamžité rychlosti úlomku v bodě A určíme jako obvodovou rychlost:

$$v_A \;=\; \omega \cdot r \;=\; 2\pi f \cdot r \;=\; 2\,\pi\,\frac{4}{3}\,\cdot\,0{,}9 \;=\; \frac{12}{5}\,\pi\ \ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 7{,}54\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Pohyb úlomku je vrhem šikmým vzhůru pod elevačním úhlem 45°. Rozložíme-li rychlost $\overrightarrow{v_A}$ na vodorovnou a svislou složku $(\overrightarrow{v_{A_x}}, \overrightarrow{v_{A_y}})$, pak jejich velikosti jsou stené:

$$v_{A_x} = v_{A_y} = v_A \cdot \sin 45° = v_A \cdot \cos 45° = \frac{12}{5}\,\pi\,\frac{\sqrt{2}}{2}\ \doteq 5{,}33\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Na trajektorii v bodě B (ve stejné výšce nad zemí jako bod A) jsou velikosti obou složek v_{A_x}, v_{A_y} stejné jako v A, ale svislá složka rychlosti míří dolů. Abychom získali velikost svislé složky rychlosti (v_{D_y}) úlomku při dopadu na zem, vyčíslíme nejprve výškový rozdíl h_B: $h_B = h_1 + r \cdot \sin 45° = 1 + 0{,}9 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ \doteq 1{,}636$ m. Dále určíme čas dopadu úlomku vyřešením kvadratické rovnice

$$h_B = v_{A_y}\!\cdot t + \frac{1}{2}\,g\,t^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_{A_y}\,t - h_B = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-v_{A_y} \pm \sqrt{v_{A_y}^2 - 2gh_B}}{g} \doteq \frac{-5{,}33 \pm 7{,}78}{9{,}81}, \qquad t_1 \doteq 0{,}25\ \mathrm{s}, \quad t_2 < 0$$

Pro svislou složku rychlosti úlomku při dopadu na zem platí:

$$v_{D_y} = \dot{h_B} = \frac{\mathrm{d}h_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_{A_y}\!\cdot t + \frac{1}{2}\,g\,t^2\right) = v_{A_y} + g\,t$$

a po dosazení číselných hodnot je $v_{D_y} = 5{,}33 + 9{,}81 \cdot 0{,}25 \doteq 7{,}78\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Celková výsledná rychlost úlomku v bodě D je pak vektorový součet $\overrightarrow{v_D} = \overrightarrow{v_{D_y}} + \overrightarrow{v_{A_x}}$ a pro její velikost tedy platí: $v_D = \sqrt{{v_{D_y}}^2 + {v_{A_x}}^2} = \sqrt{7{,}78^2 + 5{,}33^2} \doteq 9{,}43\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

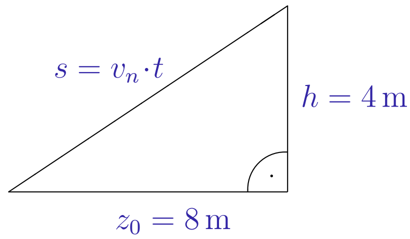
Závěr: Úlomek dopadne na zem rychlostí $9{,}43\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Příklad 3 – výpočet okamžitého zrychlení

Vlečná nákladní loď je ke břehu přitahována silnými lany, které se navíjejí rychlostí $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Paluba lodi je o $4\,\mathrm{m}$ níže než přístavní molo s navijáky. S jakým zrychlením se pohybuje loď v okamžiku, kdy je její horizontální vzdálenost od přístaviště 8 metrů?

Řešení

$v_n = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
$h = 4\,\mathrm{m}$
$z_0 = 8\ \mathrm{m}$
$a_{z_0} = ?\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$



Horizontální vzdálenost z je dána vztahem (viz obrázek):

$$z = \sqrt{v_n^2\,t^2 - h^2} \tag{1}$$

Určíme okamžitou rychlost nákladní lodi (1. derivace z podle času):

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{v_n^2\,t^2 - h^2} = \frac{2\,v_n^2\,t}{2\sqrt{v_n^2\,t^2 - h^2}} = \frac{v_n^2\,t}{\sqrt{v_n^2\,t^2 - h^2}}$$

Okamžité zrychlení lodi (2. derivace z podle času) je

$$\ddot{z} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v_n^2\,t}{\sqrt{v_n^2\,t^2 - h^2}} = \frac{v_n^2\sqrt{v_n^2\,t^2 - h^2} - v_n^2\,t\cdot\frac{2\,v_n^2\,t}{2\sqrt{v_n^2\,t^2 - h^2}}}{v_n^2\,t^2 - h^2} =$$

$$= \frac{\frac{v_n^2(v_n^2\,t^2 - h^2) - v_n^4\,t^2}{\sqrt{v_n^2\,t^2 - h^2}}}{v_n^2\,t^2 - h^2} = \frac{v_n^4\,t^2 - v_n^2\,h^2 - v_n^4\,t^2}{(v_n^2\,t^2 - h^2)\sqrt{v_n^2\,t^2 - h^2}} = \frac{-v_n^2\,h^2}{\sqrt{(v_n^2\,t^2 - h^2)^3}} \tag{2}$$

Ze vztahu (1) vyjádříme t^2 a vyčíslíme: $\quad t^2 = \dfrac{z_0^2 + h^2}{v_n^2} = \dfrac{8^2 + 4^2}{2^2} = \dfrac{64 + 16}{4} = 20$

a dosadíme do (2): $\quad a_{z_0} = \ddot{z} = \dfrac{-4\cdot 16}{\sqrt{(4\cdot 20 - 16)^3}} = -\dfrac{1}{8}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = -0{,}125\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$

Závěr

V daném okamžiku se loď pohybuje se zrychlením $-0{,}125\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ (pohyb je zpomalený).

Úlohy z kinematiky

Výpočet okamžité rychlosti

1. Člověk vysoký 1,7 m se vzdaluje rychlostí 6,34 km·h^{-1} od zdroje světla, který se nachází ve výšce 3 m. Jakou rychlostí se pohybuje stín jeho hlavy?

2. Žebřík délky 10 m se horním koncem dotýká svislé stěny, dolním koncem je opřen o podlahu. Dolní konec žebříku je uveden do pohybu rychlostí 2 m·min^{-1} směrem od stěny. Jakou rychlost má horní konec žebříku v okamžiku, kdy jeho dolní konec je vzdálen 6 m od stěny? Kam míří vektor rychlosti?

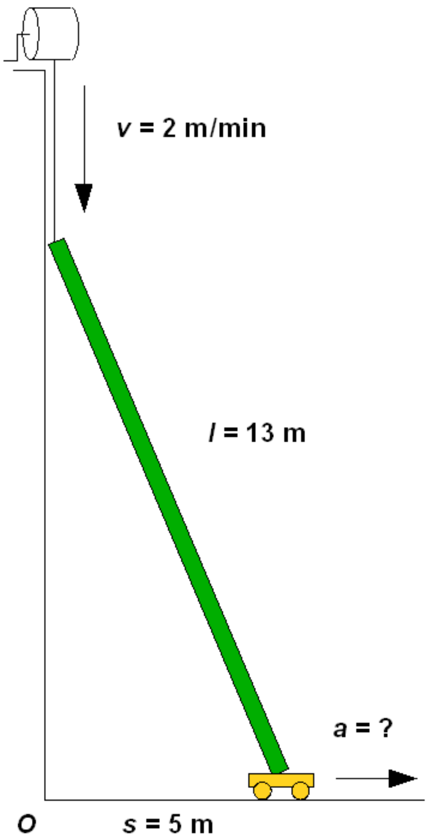
3. Kůň běží po okruhu rychlostí 20 km·h^{-1}. Ve středu okruhu se nachází světelný zdroj a podél tečny k okruhu v bodě, z něhož startuje kůň, je postavena zeď. Jakou rychlostí se pohybuje stín koně po zdi v okamžiku, kdy se kůň nachází v jedné osmině okruhu?

Výpočet okamžitého zrychlení

4. Hmotný bod se pohybuje přímočaře podle vztahu $s = \frac{4}{3}t^3 - t + 5$. Určete zrychlení a na konci 2. sekundy (s v metrech, t v sekundách).

5. Hmotný bod se pohybuje přímočaře, přičemž $s = \frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2} + s_0$. Určete zrychlení na konci 1. sekundy (s v centimetrech, t v sekundách).

6. Těžká kláda délky $l = 13$ m se spouští na zem tak, že její dolní konec je připevněn k vagónku a horní konec opírající se o zeď je připevněn provazem navinutým na kolo rumpálu. Provaz se odvíjí rychlostí 2 m·min^{-1}. Určete zrychlení vagónku v okamžiku, kdy se nachází ve vzdálenosti $s = 5$ m od bodu O (viz obrázek).



Výsledky

1. 14,63 km·h^{-1} **2.** 1,5 m·min^{-1} **3.** 40 km·h^{-1} **4.** 16 m·s^{-2} **5.** $-\frac{\pi}{18}$ cm·s^{-2} **6.** −0,0015 m·s^{-2}